Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

PD Dr. Julian Scheuer — WS 2018/19
Blatt 9 — 20. Dezember 2018

Aufgabe 9.1

Unter einer *Eulerschen Differentialgleichung* versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i x^{(i)}(t) = 0, \quad t > 0, \quad a_i \in \mathbb{K}.$$

Führen Sie die Gleichung mittels der Transformation

$$s = \log t, \quad u(s) = x(e^s)$$

auf eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten zurück und bestimmen Sie mit dieser Methode eine Basis des Lösungsraumes der Gleichung

$$t^2\ddot{x}(t) - 3t\dot{x}(t) + 7x(t) = 0.$$

Aufgabe 9.2

Sei

$$L(D) = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j, \quad a_n = 1, a_j \in \mathbb{K},$$

ein *linearer Differentialoperator* mit konstanten Koeffizienten, d.h.

$$L(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y.$$

Sei λ Nullstelle des Polynoms

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

mit Vielfachheiten $m(\lambda)$. Dann bilden die Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{(m(\lambda_1)-1)}e^{\lambda_1 t}$$

eine Basis des Lösungsraumes der Gleichung $L(D)y = 0$, wobei λ alle Nullstellen von $L(\lambda)$ durchläuft. Sind alle $a_i \in \mathbb{R}$, so bilden die Funktionen

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{(m(\lambda)-1)}e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$t^q e^{\mu t}\cos(\nu t), t^q e^{\mu t}\sin(\nu t), \quad \lambda = \mu + i\nu, \nu > 0, 0 \le q \le m(\lambda) - 1,$$

eine reelle Basis des Lösungsraumes von $L(D)y = 0$.

Die Abgabe Ihrer Lösungen ist freiwillig und hat keinen Einfluss auf die Klausurzulassung.
Wir empfehlen trotzdem dringend, die Aufgaben zu bearbeiten. Sie dürfen Ihre Lösungen abgeben und diese werden korrigiert. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.
Mindestens eine der beiden Aufgaben hat Klausurniveau, nur zu Ihrer Orientierung.
Abgabe: 10.01. in der Vorlesung.
Wir wünschen Ihnen allen ein frohes Weihnachtsfest!