Aufgabe 1 *(Beispiele von Differentialgleichungen)*
Schreiben Sie die Differentialgleichungen in der Form $F(x, u, Du, \ldots, D^k u) = 0$. Entscheiden Sie, ob die Operatoren linear sind.

(a) $d\eta = 0$ für η 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $\det(D^2 u) = 0$ für $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 *(konvexe Funktionale)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Betrachten Sie auf $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \colon u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (\phi(Du) + gu).$$

Zeigen Sie: u ist genau dann Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, wenn gilt:

$$\operatorname{div}\left[(D_p\phi)(Du)\right] = g.$$

Aufgabe 3 *(Minimumproblem ohne Lösung)*
Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \Big(\left(u'(x)^2 - 1\right)^2 + u(x)^2 \Big)\, dx$$

sein Infimum auf $C^1((0,1))$ nicht annimmt.

Abgabe am Dienstag 24.10.2017