Partielle Differentialgleichungen — WS 17/18, Serie 10
Ernst Kuwert — 15. Januar 2018
Julian Scheuer

Aufgabe 1 *(Elliptische C^0-Abschätzung, 4 Punkte)* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und erfülle $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ die Gleichung

$$a^{ij}\partial^2_{ij}u + b^i\partial_i u + qu = f,$$

wobei $q \leq 0$ und a^{ij} gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstante $\lambda > 0$ ist. Dann gilt

$$\sup_\Omega |u| \leq C\left(\|u\|_{C^0(\partial\Omega)} + \|f\|_{C^0(\Omega)}\right)$$

mit einer Konstanten $C = C\left(\frac{\sup|b|}{\lambda}, \operatorname{diam}(\Omega)\right)$.
Hinweis: Leiten Sie zunächst ein geeignetes elliptisches Maximumprinzip für die Ungleichung

$$a^{ij}\partial^2_{ij}u + b^i\partial_i u + qu \geq 0$$

her.

Aufgabe 2 *(Gegenbeispiel zur C^2-Regularität, 8 Punkte)*
Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u_\varepsilon \in C^\infty_c(B_1(0))$ mit

$$1 = \|\Delta u_\varepsilon\|_{C^0} \leq \varepsilon\|D^2u_\varepsilon\|_{C^0} \quad \text{und} \quad \|u_\varepsilon\|_{C^0} \leq C(n).$$

Zeigen Sie dies in folgenden Schritten:

(1) Die C^0-Schranke folgt aus $|\Delta u_\varepsilon| \leq 1$ und Aufgabe 1.

(2) Skalierung: es reicht $v_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ zu finden mit

$$0 < \|\Delta v_\varepsilon\|_{C^0} \leq \varepsilon\,\|D^2 v_\varepsilon\|_{C^0}.$$

(3) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x)\,\langle Ax, x\rangle \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ mit } \operatorname{tr}(A) = 0, \quad \eta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$$

die Eigenschaften in (2) hat, falls A nicht schiefsymmetrisch ist und $\eta_\varepsilon(0) = 1$, $D\eta_\varepsilon(0) = 0$, $D^2\eta_\varepsilon(0) = 0$ und

$$|x|\,|D\eta_\varepsilon(x)| + |x|^2\,|D^2\eta_\varepsilon(x)| \leq c_A\varepsilon,$$

mit einer geeigneten von A abhängigen Konstanten c_A.

(4) Bestimmen Sie nun η_ε, zum Beispiel $\eta_\varepsilon(x) = g(\varepsilon\log\frac{1}{|x|})$ für g geeignet.

Abgabe am Dienstag, 16.01.2017