Partielle Differentialgleichungen | WS 17/18, Serie 2
Ernst Kuwert | 25. Oktober 2017
Julian Scheuer

Aufgabe 1 *(zum Fundamentallemma der Variationsrechnung)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gelte:

$$\int_{\partial\Omega} u\varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 2
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass

$$u \in \mathrm{Lip}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{1,\infty}(\Omega).$$

Aufgabe 3
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie folgende Implikation:

$$Du = 0 \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{ist fast überall konstant}$$

Aufgabe 4
Sei $u \in W^{1,p}((0,1))$ mit $p \in (1,\infty)$. Zeigen Sie:

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } \mathcal{L}^1\text{-fast alle } x, y \in (0,1).$$

Abgabe freiwillig am Montag, den 30.10.2017.