Partielle Differentialgleichungen | WS 17/18, Serie 5
Ernst Kuwert | 14. November 2017
Julian Scheuer

Aufgabe 1 (Term erster Ordnung)
Begründen Sie, dass in den L^2 a priori Abschätzungen für den Operator L aus Satz 3.2 auch ein Term der Form $C_{ij}^{\alpha}\partial_\alpha u^i$ mit $\|C_{ij}^{\alpha}\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} \leq M_k < \infty$ zulässig ist.

Aufgabe 2 (quasilineare Gleichung)
Betrachten Sie zu $f \in L^2(\Omega)$ eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$\operatorname{div} A(Du) = f \quad \text{in } \Omega.$$

Dabei sei $A \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\|DA\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq M$, und

$$\partial_\alpha A_\beta(p)\eta_\alpha\eta_\beta \geq \lambda|\eta|^2 \quad \text{für alle } p, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie mit Differenzenquotienten, dass $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Aufgabe 3 (Karten auf $\mathbb{R}$)
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}$ den Atlas $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$ sowie den Atlas $\mathcal{B} = \{\varphi(x) = x^3\}$. Zeigen Sie, dass die induzierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten verschieden sind, aber diffeomorph.

Abgabe am Dienstag, 21.11.2017