Partielle Differentialgleichungen — WS 17/18, Serie 7
Ernst Kuwert — 29. November 2017
Julian Scheuer

Aufgabe 1 *(günstige Karte)*
Sei g Riemannsche Metrik der Klasse C^0 auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Bestimmen Sie zu $p \in M$ eine Karte $\varphi \colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$, mit

$$\varphi(p) = 0 \quad \text{und} \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}.$$

Aufgabe 2 *(günstigere Karte)*
Sei h_{ij} eine Riemannsche Metrik auf einer Umgebung des Nullpunkts des $\mathbb{R}^n$ mit $h_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Bestimmen Sie einen lokalen Diffeomorphismus der Form

$$\phi(x) = x^k e_k + \frac{1}{2} C^k_{ij} x^i x^j e_k, \quad \text{wobei } C^k_{ij} = C^k_{ji},$$

sodass für die pullback Metrik $g = \phi^* h$, die definiert ist durch

$$g_x(v, w) = h_{\phi(x)}(d\phi(v), d\phi(w)) \quad \forall v, w \in T_x\mathbb{R}^n,$$

gilt:

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \partial_i g_{jk}(0) = 0 \text{ für alle } i, j, k.$$

Aufgabe 3 *(Normalenbündel)*
Sei $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale Immersion und $k = m - n$. Wir definieren

$$N = \{(p, v) \in \Sigma \times \mathbb{R}^m \colon v \perp \operatorname{Bild} Df(p)\},$$

und wählen $\pi \colon N \to \Sigma$, $\pi(p, v) = p$. Konstruieren Sie auf N die Struktur eines lokal trivialen Vektorbündels vom Rang k (lokale Trivialisierungen, am besten mit Orthonormalbasen). Geben Sie ein Beispiel an, wo das Normalenbündel nicht trivial ist.

Abgabe am Dienstag, 5.12.2017