Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 01.02.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Separationsansatz*) (4 Punkte)
Lösen Sie das folgende Problem mit der Trennungsmethode:

Seien $L > 0$, $k > 0$ und $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ regulär genug.

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} + u &= 0 & \text{für } x \in (0,L), t \in (0,\infty), \\ u(x,0) &= f(x), & \text{für } x \in [0,L] \\ u(0,t) &= 0, & \text{für } t > 0 \\ -u_t(L,t) &= u(L,t), & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$. Finden Sie nun die Gleichungen, und die Randbedingungen für v und w.

Aufgabe 2 (*Lemma 12.4*) (4 Punkte)
Zeigen Sie Lemma 12.4.

Lemma 12.4. Sei $u \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}^n$, and $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gelten

$$\widehat{u(\cdot - a)} = e^{-i\xi\cdot a}\hat{u}(\xi) \quad \text{und} \quad \widehat{u(k\,\cdot)}(\xi) = \frac{1}{|k|^n}\hat{u}\left(\frac{\xi}{k}\right)$$

Aufgabe 3 (*Fouriertransformation und Wellengleichung*) (8 Punkte)
Betrachte das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Seien $\psi \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ ist die Schwartzsche Klasse) und u eine $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ Lösung mit $u(t,\cdot), u_t(t,\cdot), u_{tt}(t,\cdot) \in \mathcal{S}$. Weiter bezeichne $\hat{u}(t,\xi)$ die Fouriertransfromierte von $u(t,\cdot)$ an der Stelle ξ.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{u}$ (für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$) die Gleichung

$$\hat{u}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^2\hat{u}(t,\xi) = 0, \quad \hat{u}(0,\xi) = 0, \quad \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi).$$

erfüllt und lösen Sie die Gleichung.

Bitte Seite 2 beachten.

(b) Sei nun $n = 3$. Zeigen Sie

$$\frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\eta|=t} e^{i\langle \eta, \xi \rangle} dS(\eta) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} e^{it\langle \eta, \xi \rangle} dS(\eta)$$

(*Hinweis. Zeigen Sie zunächst*

$$\int_{|\eta|=t} e^{i\langle \eta, \xi \rangle} dS(\eta) = \int_{|\eta|=t} e^{i\langle \eta, T\xi \rangle} dS(\eta)$$

für alle $T \in O(3)$ *(d.h.,* $T^t = T^{-1}$*). Wählen Sie nun ein* $T \in O(3)$ *mit* $T\xi = |\xi|(0, 0, 1)$.)

(c) Nutzen Sie die umgekehrten Fouriertransformation und das Ergebnis aus (a) um eine Formel für u zu finden. ($n = 3$)
(*Hinweis. Benutzen Sie (b).*)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 08.02. 21, 12:15 Uhr