Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 2
Prof. Dr. G. Wang — 9.11.2020
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1(*Schwarzsches Spiegelungsprinzip*) (6 Punkte)
a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das spiegelsymmetrisch bezüglich der Ebene $E := \{x_n = 0\}$ ist, d.h.

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega \iff (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \in \Omega.$$

Weiter bezeichne $\Omega^+ := \Omega \cap \{x_n > 0\}$.
Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^0(\overline{\Omega^+})$ harmonisch und $u|_E \equiv 0$, so ist $v : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$v(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & \text{falls } x_n < 0 \end{cases}$$

in $C^2(\Omega)$ und harmonisch. (*Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 2.16.*)
b) (*Kelvin-Transformation*) Es sei $u : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonisch ($n > 2$). Sei

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

die Kelvin-Transformation. Zeigen Sie, dass v auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ harmonisch ist.

Aufgabe 2 (*harmonische Funktion, Mittelwerteigenschaft*) (6 Punkte)
a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert. Zeigen Sie, dass u in Ω harmonisch ist.
b) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: Die Niveaumengen

$$N_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n |\ u(x) = \alpha\}$$

sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ entweder leer oder unbeschränkt.
Hinweis: Mittelwerteigenschaft auf größerer Sphären!

Aufgabe 3 (*das Maximumprinzip*) (4 Punkte)
a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ erfülle

$$\begin{cases} \Delta u = -1, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) \geq \frac{1}{2n} \inf_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2.$$

(*Hinweis. Sie betrachten die Funktion* $w = u + \frac{1}{2n}|x - x_0|^2$.)

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Zeigen Sie:

b1) Wenn $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum von u ist, so gilt $\Delta u(x_0) \leq 0$.

b2) u genüge $\Delta u = u^3 - u$ und sei am Rand beschränkt: $|u(\partial\Omega)| \leq 1$. Man zeige, dass $-1 \leq u \leq 1$ in $\overline{\Omega}$ gilt.

Aufgabe 4 (*Harnacksche Ungleichung und Liouvillesch Satz*) ($3^* + 1^*$ Punkte)

1. Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nicht-negativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

   für alle $x \in B_R(0)$.

2. Leiten Sie daraus den Satz von Liouville ab: Eine nach unten (oder oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.

Aufgabe 4 ist eine Bonusaufgabe, die (bei korrekter Bearbeitung) 4^* Bonus-Punkte bringt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 16.11, 12:15 Uhr