Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 16.11.2020
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Greensche Funktion für den Halbraum*) (4 Punkte)
Sei $n \geq 2$, $\Omega := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ der obere Halbraum und Φ die Grundlösung aus der Vorlesung zur Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^n$. Sei weiter

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \mapsto \tilde{x} := (x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) \in \mathbb{R}^n$$

die Spiegelung an der Ebene $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$G : \overline{\Omega} \times \Omega \backslash \{(z,z) : z \in \Omega\} \to \mathbb{R}, \quad G(y,x) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

eine Greenfunktion der Laplace-Gleichung in Ω ist.

b) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, \text{ in } \Omega \\ u &= \varphi, \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Benutzen Sie Ergebnisse der Vorlesung, ohne deren Gültigkeit für unbeschränkte Gebiete zu prüfen.

Aufgabe 2 *(C^2-subharmonische Funktionen)* (4 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe C^2-Funktion und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $\phi \circ u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch ist.

b) Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ u(x) := \log|x|$ für $n \geq 2$ subharmonisch ist.

Aufgabe 3 *(C^0-subharmonische Funktionen)* (4 Punkte)
Zeigen Sie Lemma 4.12: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u_1, \ldots, u_N$ auf Ω definierte C^0-subharmonische Funktionen. Dann ist auch*

$$u(x) := \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

eine C^0-subharmonische Funktion auf Ω.

Zeigen Sie außerdem, dass $\log_+ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^0-subharmonische Funktion ist. Hierbei ist

$$\log_+(x) := \begin{cases} \log|x|, & \text{falls } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4 *(Innere Kugelbedingung)* (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^2-Rand. Zeigen Sie, dass Ω der *inneren Kugelbedingung* genügt, d.h. für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Hinweis: Mittels einer geeigneten Drehung um den Punkt x_0 nehmen wir an, dass der Tangentialraum an $\partial\Omega$ im Punkt x_0 durch $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ gegeben ist. Der Rand von Ω lässt sich dann in einer Umgebung U von x_0 als Graph einer C^2-Funktion $f : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ (mit $\tilde{U} := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x, 0) \in U\}$) darstellen:

$$\partial\Omega \cap U = \{(x', f(x') \mid x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \tilde{U}\}$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 23.11, 12:15 Uhr