Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE
Prof. Dr. G. Wang
MSc. J. Metsch

WS 2020/2021, Serie 4
23.11.2020

---

**Aufgabe 1** *Äußeres Dirichlet-Problem* (4+4 Punkte)
Sei $3 \leq n \in \mathbb{N}$, $R > 0$ und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > R\}$.

a) Es sei $\varphi \in C^0(\partial B_R)$. Lösen Sie das Dirichletproblem für die Komplement der Kugel:

$$\begin{cases} u & \in & C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u & = & 0 \text{ in } \Omega \\ u & = & \varphi \text{ auf } \partial\Omega \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) & = & 0. \end{cases} \tag{1}$$

*Hinweis. Betrachte die Kelvintransformation* $k : \Omega \to B_R \backslash \{0\}$

$$k(x) = \frac{R^2}{|x|^2} x \quad \text{und} \quad v(x) = |x|^{2-n} u(k(x)).$$

*Zeigen Sie zunächst mit dem Hebbarkeitssatz (Satz 3.16), dass $u$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn $v$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} v & \in & C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R}) \\ -\Delta v & = & 0 \textit{ in } B_R \\ v & = & R^{2-n}\varphi \textit{ auf } \partial B_R \end{cases} \tag{2}$$

*ist. Wenden Sie danach die Lösungsformel für (2) (Satz 3.13) an und finden Sie die Lösungsformel für (1).*

b) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u & = & 0 \text{ in } \Omega, \\ u & = & 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$, falls

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \tag{4}$$

gilt. Finden Sie außerdem ein Beispiel für eine Funktion $u$, die zwar die Gleichung (3) löst aber nicht identisch 0 auf $\Omega$ ist. Folglich kann also auf (4) nicht verzeichtet werden.

**Aufgabe 2** (*Maximumprinzip und Abschätzung*) (4 Punkte)
Sei $u \in C^3(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $-Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) = 0$ in $\Omega$. Hierbei sei der Operator $L$ gleichmäßig elliptisch und $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ für $i, j = 1, 2, ..., n$.

a) Sei $v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$. Zeigen Sie $-Lv \leq 0$ in $\Omega$ für hinreichend große $\lambda > 0$.

b) Folgern Sie

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(n, L) \left( \|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right).$$

Hiebei ist $C(n, L)$ eine konstante, die nur von $n$ und dem operator $L$ abhängt.

**Aufgabe 3** (*Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Auf $\Omega \times [0, \infty) = \{(x_1, \cdots, x_n, t) \,|\, t \geq 0\}$ betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Zeigen Sie, dass für $T \in (0, \infty)$ und eine Lösung $u \in C^2(\Omega \times (0, T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, T])$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\sup_{\Omega \times [0,T]} \leq \sup_{P\Omega} u \tag{5}$$

gilt. Hierbei ist $P\Omega = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T])$ der *parabolische Rand.*
*Hinweis. Schritt 1. Betrachte $u_t - \Delta u < 0$. Schritt 2. Betrachte $v_\epsilon = u - \epsilon t$.*

---

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.*
**Abgabe ist am Montag, 30.11, 12:15 Uhr**