
Aufgabe 1 *Die Wärmeleitungsgleichung* (8 Punkte)

(a) Sei $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto u(x,t)$ glatt und eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass für alle $\lambda > 0$ auch

$$u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Folgern Sie, dass auch

$$v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$$

die Wärmeleitungsgleichung löst.

(b) Wir definieren die *Fundamentallösung* der Wäremeleitungsgleichung als

$$\gamma(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Name gerechtfertigt ist, indem Sie nachrechnen, dass γ die Wärmeleitungsgleichung tatsächlich löst.

(c) Sei $\alpha > 0$. Wir definieren

$$G_\alpha : \mathbb{R}^n \times \left(0, \frac{1}{4\alpha}\right) \to \mathbb{R},\ G_\alpha(x,t) = \frac{1}{(1-4\alpha t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{\alpha|x|^2}{1-4\alpha t}}.$$

Zeigen Sie, dass G_α für $t \in \left(0, \frac{1}{4\alpha}\right)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x,t)dx = 1.$$

Bitten wenden Sie

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $n = 1$, $v \in C^2(\mathbb{R})$ und $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ u(x,t) := v(\frac{x^2}{t})$.

(a) Zeigen Sie, dass $u_t = u_{xx}$ genau dann gilt, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \qquad \text{für } z > 0. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass die allgmeeine Lösung von (1) die folgende Form hat:

$$v(z) = c_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + c_2$$

Hier bei sind c_1 und c_2 konstanten.

(c) Leiten Sie $v(\frac{x^2}{t})$ nach x ab und zeigen Sie, dass man so für eine schlaue Wahl der Konstante c_1 die eindimensionale Fundamenatallösung[1] erhält.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei eine stetige Funktion $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$.
Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

$$u : [0,\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto u(t,x)$$

mit der Regularität $u \in C^0([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^\infty((0,\infty) \times [0,\pi])$ für das Problem

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u, & \text{in } (0,\infty) \times (0,\pi), \\ u(0,x) &= \varphi(x), & x \in [0,\pi], \\ u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, & t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Hinweis: Man setze das Anfangsdatum φ ungerade und 2π-periodisch als stetige Funktion nach $\mathbb{R}$ fort und benutze den Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$. Nun zeige man, dass für diese Lösung $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ für alle $t > 0$ gilt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 7.12, 12:15 Uhr.

[1] Vergleiche Aufgabe 1 (b).