Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 7
Prof. Dr. G. Wang — 14.12.2020
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (Unterlösung) (4 Punkte)
Seien $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T > 0$. Eine Funktion $\psi \in C^{2,1}(\Omega_T)$ heißt *Unterlösung* der Wärmeleitungsgleichung, falls

$$\partial_t \psi - \Delta \psi \leq 0$$

in Ω_T gilt. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie:

(a) Ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte konvexe Funktion, so ist $v := \phi \circ u$ eine Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung.

(b) Ist zusätzlich $u \in C^{3,2}(\Omega_T)$, so ist $w = |Du|^2 + u_t^2$ eine Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 2 (Das Maximumprinzip) (4 Punkte)
Zeigen Sie Korollar 7.12: *Seien $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenängend und $T > 0$. Weiter löse $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \textit{in } \Omega_T \\ u &= 0, && \textit{auf } \partial\Omega \times [0,T] \\ u &= \varphi, && \textit{auf } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, aber $\varphi \not\equiv 0$. Dann folgt $u > 0$ in Ω_T.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes reguläres Gebiet[1], $T > 0$ und eine Lösung $u \in C^{1,2}(\overline{\Omega_T})$ von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & \text{in } \Omega_T, \\ u = 0, & \text{auf } (0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass $u_t \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$, $u_{t,x_i}(\cdot,t) \in C^0(\overline{\Omega})$ für $1 \leq i \leq n$ gilt.

Die *thermische Energie* des Körpers Ω zur Zeit t ist definiert als

$$E(t) = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

---

[1] Das heißt, dass der Rand von Ω regulär ist.

Beweisen Sie, dass für alles Zeiten $t, t_1, t_2 \in [0,T]$ mit $0 \leq t_1 < t < t_2 \leq T$

$$E(t) \leq [E(t_1)]^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}} [E(t_2)]^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}. \tag{1}$$

Die Eigenschaft von (1) heißt die log-*Konvexität der Funktion E. Hinweis: Man studiere $E'(t)$ und $E''(t)$ und zeige*

$$E''(t) = 4 \int_\Omega (u_t)^2 dx.$$

Nun nutzen man die Höldersche Ungleichung, um

$$(E'(t))^2 \leq E(t)E''(t)$$

zu zeigen. Als nächstes nehme man zunächst $E(t) > 0$ an und betrachte $f(t) := \ln E(t)$. Man zeige, dass f konvex ist, d.h. $f'' \geq 0$ und nutze die äquivalente Formulierung der Konvexität

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t_2)$$

für $t_1, t_2 \in [0,T]$ und $\tau \in [0,1]$ um die Ungleichung zu erhalten.
Für den allgemeinen Fall betrachte man $\ln(E(t) + \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 4 (Satz von Liouville-Typ) (4 Punkte)
Sei $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0))$ eine Lösung von

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0).$$

Weiter gelte für eine Konstante $C > 0$ und ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$|u(x,t)| \leq C(1 + |x| + \sqrt{|t|})^m, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0).$$

Zeigen Sie, dass u ein Polynom mit Grad $\deg u \leq m$ in der Ortszeitvariable $x = (x_1, ..., x_n, t)$ ist.
Folgern Sie die folgende Verstäkng des Satzes von Liouville:

Satz (Verallgemeinerung des Satzes von Liouville)**.**
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch, also eine Lösung von

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Weiter gelte für ein $C > 0$ und ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist u ein Polynom mit Grad $\deg u \leq m$ in $x = (x_1, \cdots, x_n)$.