Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 21.12.2020
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (Abschätzung) (2* Punkte)
Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n$, Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und für $1 \leq j \leq m$ Funktionen $u_j \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ Lösungen von

$$\partial_t u_j - \Delta u_j = 0 \text{ in } \Omega_T$$

Zeigen Sie, dass für eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\sup_{\Omega_T} f(u_1, u_2, \cdots, u_m) \leq \sup_{\partial_p \Omega_T} f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$

gilt.

Aufgabe 2 (Abschätzung) (2* Punkte)
Seien Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$, c eine stetige Funktion in Ω_T mit der Eigenschaft $c \leq c_0$ für eine nicht-negative Konstante $c \leq c_0$ und φ stetig in Ω mit $\varphi \geq 0$. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - cu &= -u^2 && \text{in } \Omega_T, \\ u(\cdot, 0) &= \varphi && \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$0 \leq u \leq e^{c_0 T} \sup_{\Omega} \varphi \quad \text{in } \Omega \times (0, T].$$

Aufgabe 3 (Abschätzung) (2* Punkte)
Seien Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $\varphi, f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ und $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= e^{-u} - f && \text{in } \Omega_T, \\ u(\cdot, 0) &= \varphi && \text{auf } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$-M \leq u \leq Te^M + M \quad \text{in } \Omega \times (0, T].$$

Hierbei ist

$$M := T \sup_{\Omega} |f| + \max\{\sup_{\Omega} |\varphi|, \sup_{\partial\Omega \times (0,T)} |g|\}.$$

Aufgabe 4 (Gradienten Abschätzung) (2* Punkte)
Seien u_0 eine stetige und beschränkte Funktion in $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ und $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T) \cap C^0(\bar{\mathbb{R}}^n_T)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T], \\ u(\cdot,0) &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Weiter seinen u und ∇u in $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ beschränkt. Zeigen Sie

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times (0,T]} |\nabla u(\cdot,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \sup_{\mathbb{R}^n} |u_0|.$$

Hinweis: Mit $M := \sup_{\mathbb{R}^n} |u_0|$ betrachte man $w := u^2 + 2t|\nabla u|^2 - M^2$.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch ins neue Jahr 2021!

Bleiben Sie gesund!

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 11.01.2021, 12:15 Uhr