Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 11.1.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*D'Alembertsche Formel*) (4 Punkte)
Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachten Sie das Cauchyproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) &= \varphi, \\ u_t(0, \cdot) &= \psi \end{cases}$$

mit der Transformation $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ mit $\xi = x + t$ und $\eta = x - t$. Leiten Sie eine partielle Differentialgleichung für $v(\xi, \eta) := u(x, t)$ her und lösen diese. Nutzen Sie nun die Lösung für v um eine Formel für u anzugeben. Diese heißt die *D'Alembertsche Formel*.

Aufgabe 2 (*Das Goursat Problem*) (4 Punkte)
Seien $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^2((0, \infty))$. Betrachten Sie das Goursat Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{für } 0 < t < x, \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad \text{für } x > 0, \\ u_(x, x) &= \varphi_2(x), \quad \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie außerdem für jeden Punkt (x, t) mit $0 < t < x$ den Bestimmtheitsbereich.

Aufgabe 3 (*Kompatibilitätsbedingungen und periodische Lösung*) (4 Punkte)
Sei im Folgenden $L > 0$ fest. Gegeben seien geeignete Funktionen $\phi, \psi : [0, L] \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u \in C^2([0, L] \times \mathbb{R})$ als Lösung des Cauchyproblems für die homogene Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, && \text{für } (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= \varphi, && \text{für } x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) &= \psi, && \text{für } x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, && \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Finden Sie zunächst die Kompatibilitätsbedingungen für (1). Nehmen Sie diese anschließend an und lösen Sie das Probelm (1).

Aufgabe 4 (*Die kinetische und die potentielle Energie*) (4 Punkte)
Gegeben seien Funktionen $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ die Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Weiter bezeichne

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t(t,x)^2 dx \quad \text{bzw.} \qquad p(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x(t,x)^2 dx$$

die kinetische bzw. die potentielle Energie der Lösung u zur Zeit t. Zeigen Sie:

a) Die Gesamtenergie ist kosnatnt. Das heißt die Abbildung $t \mapsto k(t) + p(t)$ ist konstant.

b) Für hinreichend große positive Zeiten gilt Gleichheit zwischen potentieller und kinetischer Energie:

$$\exists T_0 > 0 \text{ geeignet} : \forall t \geq T_0 : k(t) = p(t).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, 18.1. 21, 12:15 Uhr