Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung WS18/19, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang 18.11.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden drei Funktionen oder Funktionale die (PS) Bedingung erfüllen.
a) $f_1(x, y) = \sin x + xy^2$ auf $\mathbb{R}^2$.
b) $f_2(x, y, z) = xy + yz + xz + 2014x$ auf $\mathbb{R}^3$.
c) $f_3(u) = \int_0^{1/2} u^2(x)dx$ auf $L^2([0, 1], \mathbb{R})$

Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, sodass $|\varphi| + |D\varphi|$ koerziv ist. Zeigen Sie, dass φ die Palais-Smale-Bedingung erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $2 < m < \frac{2n}{n-2}$. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{m} \int_\Omega |u|^m dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

nach oben und unten *unbeschränkt* ist. (vgl. Sobolev-Ungleichung)

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ die Palais-Smale-Bedingung erfüllt, falls es folgende Eigenschaften hat:
(i) Jede (PS)-Folge von $\mathcal{F}$ ist in H beschränkt.
(ii) Es gibt einen linearen Operator $L : H \to H$ mit stetiger Inversen sowie einen stetigen (möglicherweise nichtlinear) kompakten Operator $K : H \to H$ (d.h. K bildet beschränkte Mengen in präkompakte Megnen ab), so dass an jeder Stelle $u \in H$ gilt:

$$D\mathcal{F}(u) = Lu + K(u).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Folgendes Beispiel demonstriert die Notwendigkeit der Kompaktheitsbedingung im MPT (Satz 7.8): Die Funktion

$$\mathcal{F}(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

erfüllt alle geometrische Bedingung (i)-(iii) des MPT: Bedingung (ii) mit $r = \frac{1}{2}$, sowie $\mathcal{F}(0, 0) = \mathcal{F}(2, 2) = 0$. Der einzige kritische Punkt von $\mathcal{F}$ ist jedoch $(0, 0)$.

Frohe Weinachten!

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 8.1.2019, vor der Vorlesung**.