Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS18/19, Serie 01
Prof. Dr. G. Wang — 8.11.2019
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet, welches sternförmig bezgüglich 0 ist. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sei $p > \frac{n+2}{n-2}$. Zeigen Sie, dass $u = 0$.
(Verwenden Sie die Pohozaev-Identität nicht direkt, sondern multiplizieren Sie die Gleichung mit $x \cdot \nabla u$.)

Aufgabe 2 (4Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $F = F(z,p) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ glatt sowie unabhängig von $x \in \Omega$. Sei u eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung von $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(u, Du)dx$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_\alpha (\partial_{p_\alpha} F \partial_{x_\beta} u - F\delta_{\alpha\beta})_{x_\alpha} = 0 \quad \text{für alle } \beta = 1, \cdots, n.$$

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)

Seien $B \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe und $X \in H^1(B, \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Weiter sei $V : H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ ein Funktional gegeben durch

$$V(X) := \frac{1}{3}\int_B X \cdot (X_u \wedge X_v)dw, \quad w = (u,v) \in B.$$

Zeigen Sie:

a) V ist wohldefiniert und C^1. Hierbei ist $H^1(B, \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ mit der Norm $|\cdot|_{L^\infty(B)} + |\cdot|_{H^1(B)}$ ausgestattet.

b) Für alle $X, \varphi, \psi \in H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ gilt:

$$V(X+\varphi) = V(X) + \langle \delta V(X), \varphi \rangle + \frac{1}{2}\delta^2 V(X)(\varphi, \varphi) + V(\varphi),$$

wobei

$$\langle \delta V(X), \varphi \rangle = \frac{1}{3}\int_B \{(\varphi_u \wedge X_v + X_u \wedge \varphi_v) \cdot X + X_u \wedge X_v \cdot \varphi\}dw,$$

Bitten wenden Sie

$$\begin{aligned}\delta^2 V(X)(\varphi,\psi) &= \frac{1}{3}\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v)\cdot X dw \\ &+ \frac{1}{3}\int_B (\varphi_u \wedge X_v + X_u \wedge \varphi_v)\cdot \psi + (\psi_u \wedge X_v + X_u \wedge \psi_v)\cdot \varphi dw.\end{aligned}$$

c) Falls $\rho, \varphi, \psi \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$, und falls eine der Funktionen ρ, φ, oder ψ auf ∂B verschwindet, dann gilt

$$\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v)\cdot \rho dw = \int_B \varphi_u \wedge \rho_v + \rho_u \wedge \varphi_v)\cdot \psi dw.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration und die Schiefsymmetrie* $a \wedge b = -b \wedge a$.)

d) V ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 15.1.2019, vor der Vorlesung**.