Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung WS18/19, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang 15.1.2019
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (*Impulserhaltungsgesetz*) (4 Punkte)
Wie im Beispiel 8.9 betrachten wir die nichtlineare Wellengleichung $u_{tt}-\Delta u+f(u)=0$ und die Transformationen

$$(x,t)\mapsto(x+\tau e_\alpha,t).$$

Hier bezeichnet $e_\alpha, \alpha=1,2,\cdots,n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Noether die Impulsdichte (momentum density) p_α und den Impulsfluss (monemtum flux) j_α, sodass diese das Impulserhaltungsgesetz

$$(p_\alpha)_t-\operatorname{div}(j_\alpha)=0 \quad \text{für } \alpha=1,2,\cdots,n$$

erfüllen.

Aufgabe 2 (*harmonische Funktionen*) (12 Punkte)
Sei u harmonisch in einem Gebiet $U\subset\mathbb{R}^n$ und $B_R(0)\subset U$ sowie $u(0)=0$ und $u\neq 0$. Sei $0<r<R$ und

$$a(r):=\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_r(0)}u^2dS, \quad b(r):=\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B_r(0)}|\nabla u|^2dx.$$

Da u harmonisch ist, genügt es der folgenden Monotonieformel:

$$b'(r)=\frac{2}{r^{n-2}}\int_{\partial B_r(0)}u_r^2dS.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$a'=\frac{2}{r^{n-1}}\int_{\partial B_r(0)}uu_rdS=\frac{2}{r}b.$$

b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$b^2\leq\frac{r}{2}ab'$$

c) Sei $f:=ba^{-1}$. Zeigen Sie, dass $f'\geq 0$.
d) Seien $\beta:=2\frac{b(R)}{a(R)}$ und $\gamma:=\frac{a(R)}{R^\beta}$. Zeigen Sie, dass $\frac{a'}{a}\leq\frac{\beta}{r}$ und folglich

$$a(r)\geq\gamma r^\beta.$$

(Hinweis: Die letzte Ungleichung gibt eine untere Schranke für das Wachstum einer harmonischen Funktionen nahe einer Nullstelle.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 22.1.2019, vor der Vorlesung**.