Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung WS18/19, Serie 13
Prof. Dr. G. Wang 22.1.2019
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 9.2: Die Dirichletenergie D ist konform invariant, d.h.:

$$D(X \circ g) = D(X)$$

für jeden Diffeomorphismus $g : \overline{B} \to \overline{B}$ mit $|g_u|^2 - |g_v|^2 = g_u \cdot g_v = 0 \quad$ in $\overline{B}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G ein Gebiet in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und $X \in H^1(G, \mathbb{R}^n)$. Es gelte

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(U)) = 0,$$

für alle $U \subset \Omega$ und für jede glatte Schar von Diffeomorphismen $g_t : \overline{U} \to g(\overline{U})$ mit $g_0 = id$. Finden Sie das Erhaltungsgesetz mit dem Satz von Noether.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie das duale Variationsprinzip:

$$\min_{w \in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega (\frac{1}{2}|Dw|^2 - fw)dx = \max_{\xi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \operatorname{div} \xi + f = 0} -\frac{1}{2} \int_\Omega |\xi|^2 dx.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben sei ein Variationsintegral der Form

$$\mathcal{F}(u) = \int_\alpha^\beta F(u(x), u'(x))dx.$$

Nehmen Sie an, die Lösung $u \in C^2([\alpha, \beta])$ des Variationsproblems $\delta\mathcal{F}(u) = 0$ invertierbar und es gelte insbesondere $u' > 0$. Die Inverse von $y = u(x)$ sei mit $x = v(y)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem äquivalent ist zu $\delta G(v) = 0$ mit

$$G(v) = \int_a^b G(y, v'(y))dy$$

und

$$G(y, v'(y)) = F\left(y, \frac{1}{v'(y)}\right) v'(y).$$

Wie sind a und b bestimmt?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 29.1.2019, vor der Vorlesung**.