

Aufgabe 1 (*starke und schwache lokale Minimalstelle*) (4 Punkte)

Gemäß Definition 2.5 ist $u \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \subset X = (\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$

1) eine *schwache lokale* Minimalstelle von \mathcal{F} in \mathcal{C} , falls $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; X).$$

2) eine *starke lokale* Minimalstelle von \mathcal{F} in \mathcal{C} , falls $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)).$$

Sie zeigen, dass

- a) $u(x) = 0$ eine schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - u'(t)^4) dt$ in $\mathcal{C} = \{u \in X \mid u(0) = u(1) = 0\}$ ist, wobei $X = C^1([0, 1])$ ist;
 b) aber $u(x) = 0$ keine starke lokale Minimalstelle ist.

(Hinweis Betrachte die Folge $(p < 1)$)

$$u_{p,q} = \begin{cases} \frac{q}{p}t, & 0 \leq t \leq p \\ \frac{q}{p-1}(t-1), & p < t \leq 1 \end{cases}$$

und berechne $\mathcal{F}(u_{p,q})$ mit $p \rightarrow 1$. Die Funktionen $u_{p,q}$ lassen sich durch C^1 -Funktionen in L^∞ approximieren.)

Aufgabe 2 (*Minimumproblem ohne Lösung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left((u''(x) - 1)^2 + u(x)^2 \right) dx$$

sein Infimum auf $C^1((0, 1))$ nicht annimmt.

Aufgabe 3 (*Kapillarflächen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand. Betrachte für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\kappa, \sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} u^2 + \sigma \int_{\partial\Omega} u \, d\mu.$$

Es gelte

$$\delta \mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in Ω sowie auf $\partial\Omega$, und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch, ähnlich wie in Bsp 2.32.

Aufgabe 4 (*keine schwache lokale Minimalstelle*) (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 (x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3) dx$. Es gilt

$$\delta \mathcal{F}(0, \xi) = 0, \forall \xi \in C_0^1([-1, 1]), \quad \delta^2 \mathcal{F}(0, \xi) > 0, \forall 0 \neq \xi \in C_0^1([-1, 1]),$$

aber $u = 0$ ist keine schwache lokale Minimalstelle.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 30.10., vor der Vorlesung.