Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SW18/19, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 30.10.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (*EL-Geleichung*) (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F}(u) := \int_a^b F(u(x), u'(x))dx$, d.h., die Lagrange-Funktion F hängt nicht von x ab.

a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$ her.

b) Sei u eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$. Zeigen sie, dass $F(u, u') - u'F_p(u, u') = const.$ auf $[a, b]$.
(*Wir nehmen an, dass F und u hinreichend regulär sind.*)

Aufgabe 2(*Minimalflächen vom Rotationstyp*) (4 Punkte)

Sei $u : [0, b] \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Die durch

$$(x, u(x)\cos\theta, u(x)\sin\theta)$$

definierte Flache $f : [0, b] \times [0, 2\pi] \in \mathbb{R}^3$ ist eine Fläche vom Rotationstyp.

a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt von f durch

$$\mathcal{A}(u) = 2\pi \int_0^b |u|\sqrt{1 + u'(x)^2}dx$$

gegeben ist.

b) Sei u ein Minimierer von

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^b u\sqrt{1 + u'(x)^2}dx$$

in $\mathcal{C} := \{u \in C^1([0, b]) \,|\, u(0) = 1, u(b) = B\}$. Bestimmen Sie u mit Hilfe von Aufgabe 1 b).

Aufgabe 3 (*Erste und zeite Variationen*) (4 Punkte)

Man löse die Euler-Lagrange-Gleichungen in $C^2([0, 1])$ für

a) $\mathcal{F}(u) = \int_0^1((u'(t))^2 + 2u(t))dt, \quad u(0) = u(1) = 1.$

b) $\mathcal{F}(u) = \int_0^2 ((u'(t))^2 + 2u(t)u'(t) + u(t)^2)dt, \quad u(0) = u(2) = 1.$

Man berechne die zweite Variation von $\mathcal{F}$ und diskutiere, ob die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen lokale oder globale Minimierer unter allen Funktionen in $C^1([0,1])$ sind, die die gleichen Randbedingungen erfüllen.

Aufgabe 4 (konvexes Funktional) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Betrachten Sie auf $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (\phi(Du) + gu).$$

Zeigen Sie: u ist genau dann Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, wenn gilt:

$$\operatorname{div}[(D_p\phi)(Du)] = g.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 30.10., vor der Vorlesung**.