Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SW18/19, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 6.11.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien
$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 u^2(x) dx.$$
Man beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) u ist globaler Minimierer für $\mathcal{F}$ in $D = C^{1,stw}[0,1] \cap \{u(0) = 0, u(1) = 0\}$ unter der Nebenbedingung $\mathcal{G}(u) = 1$.

ii) $u \in C^2[0,1]$, $\mathcal{G}(u) = 1$, $u'' + \lambda u = 0$ auf $[0,1]$, $u(0) = 0, u(1) = 0$,
$$\lambda \int_0^1 h^2 dx \leq \int_0^1 h'^2 dx \text{ für alle } h \in C_0^{1,stw}[0,1].$$
Man gebe u und $\lambda > 0$ unter der Annahme, dass (i) oder (ii) erfüllbar sind, explizit an.

Bemerkung. Wenn Sie Funktionalanalysis gehört haben, wäre es besser $D = W_0^{1,2}([0,1])$ statt $D = C^{1,stw}[0,1] \cap \{u(0) = 0, u(1) = 0\}$ zu untersuchen. Das gilt auch für Aufgabe 2.

Die Gleichung $\lambda \int_0^1 h^2 dx \leq \int_0^1 h'^2 dx$ heißt Poincaré-Ungleichung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Man berechne einen globalen Minimierer $u \in D = C^{1,stw}[0,1]$ für
$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u')^2 dx$$
unter den isoperimetrischen Nebenbedingungen
$$\mathcal{G}_1(u) = \int_0^1 u^2 = 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_2(u) = \int u dx = m,$$
sofern er existiert. Zeigen Sie, dass für $m = 0$ die Existenz eine Poincaré-Ungleichung für alle $h \in C^{1,stw}[0,1] \cap \{\int_0^1 h dx = 0\}$ impliziert?

Bemerkung. Die Existenz für $m^2 = 1$ ist klar und für $m^2 < 1$ kann sie mit den direkten Methoden, die wir später untersuchen werden, bewiesen werden.

Aufgabe 3 (*Geodätische*) (8 Punkte)

Durch die Gleichung $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ sei eine Fläche S im $\mathbb{R}^3$ definiert. Als Geodätische von S bezeichnet man diejenigen (differenzierbaren) Kurven

$$t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

für die das Funktional

$$L(x) := \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i'(t)^2 dt}$$

unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ einen minimalen Wert annimmt.

(a) Man stelle für das Problem die Euler-Lagrange-Gleichung auf und versuche eine geometrische Interpretation.

(b) Man zeige: Die Geodätischen der Sphäre

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - r^2 = 0$$

sind Stücke von Großkreisen.

(*Hinweis.* Man betrachte als Anfangspunkt o.E. $x(0) = (1, 0, 0)$ und nemhe an, dass die Geodätische nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $|x'(t)| = 1$. Man zeige zunächst, dass der Lagrange-Multiplikator λ konstant ist.)

(c) Man bestimme die Geodätische von $A = (1, 0, 0)$ bis $B = (-1, 0, 1)$ auf dem Zylinder $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$. Ist diese eindeutig bestimmt?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 13.11., vor der Vorlesung**.