Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung SW18/19, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang 13.11.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (*Pendelgleichung)* (4 Punkte)
Seien $m, l, g > 0$ und $x_1 := l \sin\theta, x_2 := -l\cos\theta$, wobei $\theta \in C^2(\mathbb{R})$. Man zeige, dass die Gültigkeit des Systems

$$\begin{cases} 2\lambda(t)x_1(t) - m\ddot{x}_1 &= 0 \\ -mg + 2\lambda(t)x_2(t) - m\ddot{x}_2 &= 0 \end{cases}$$

für eine stetige Funktion λ und die Pendelgleichung

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

äquivalent sind. (*Hinweis*. Man zeige zunächst, dass für eine Lösung θ von (1) der Erhaltungssatz $\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = const$ gilt.)

Aufgabe 2 (*Schwache Differentierbarkeit)* (4 Punkte)
Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $u(x) = |x|^{-\alpha}$ für $x \neq 0$. Für welche Werte von $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (1, \infty)$ gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Aufgabe 3 (*Unterhalbstetigkeit*) (4 Punkte)
Es sei X ein metrischer (allgemeiner: topologischer) Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. f heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in X$, falls entweder $f(x_0) = -\infty$ oder falls es zu jedem reellen $r < f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass $r < f(x)$ für alle $x \in U$ gilt. f heißt unterhalbstetig, falls dies in jedem $x_0 \in X$ gilt.
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist genau dann unterhalbstetig, wenn $f^{-1}[(a, \infty)]$ für alle $a \in \mathbb{R}$ offen ist.
b) Das punktweise Supremum einer Familie in x_0 unterhalbstetiger Funktionen ist in x_0 unterhalbstetig.
c) Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist $f : X \to [0, 1]$ unterhalbstetig, so gibt es eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen f_n, die punktweise gegen f konvergiert. (*Hinweis*: $f_n(x) = \inf\{f(y) + nd(x, y)|y \in X\}$.)

Aufgabe 4 (*Minimierer*) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Man zeige, dass das Variationsproblem

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2}|Du|^2 - fu)dx \quad \text{in } \mathcal{U} = \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \,|\, \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$$

einen eindeutigen Minimierer hat.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 20.11., vor der Vorlesung**.