Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SW18/19, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 27.11.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (*Divergenz-Struktur, Null-Lagrange-Funktion*) (4 Punkte)

a) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Man zeige

$$\operatorname{div}(\operatorname{cof} Dw) = 0,$$

d.h.,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{cof} Dw)_{ij} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

b) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $(p > n)$. Man zeige:

$$\int_\Omega \det(Du) dx = \int_\Omega \det(Dv) dx.$$

(*Bemerkung.* Eine Funktion $F : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\int_\Omega F(Du)$ nur von den Werten von u auf dem Rand $\partial\Omega$ abhängt, nennt man *Null-Lagrange-Funktion.*)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges Minimum $u \in \mathcal{U}$ von

$$\mathcal{F}(w) := \int_\Omega (\frac{1}{2}|Dw|^2 - fw) dx$$

existiert, wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $\mathcal{U} := \{w \in H_0^1(\Omega) \mid |Dw| \leq 1 \text{ f. ü. in } \Omega\}$.
b) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_\Omega Du \cdot D(w - u) dx \geq \int_\Omega f(w - u) dx, \quad \forall w \in \mathcal{U}.$$

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)

Sei $D = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $W^{1,2}(D, \mathbb{S}^2) = \{u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3) : |u(z)| = 1 \text{ fast überall}\}$ unter schwacher Konvergenz in $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$ abgeschlossen ist.

(b) Begründen Sie, dass das folgende Funktional für $\lambda \in [-1, 1]$ unter dieser Konvergenz unterhalbstetig ist ($\times$ bezeichnet das Kreuzprodukt):

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_D |Du|^2 + \lambda \int_D \langle u, \partial_1 u \times \partial_2 u \rangle.$$

(c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$.

(d) Finden Sie ein Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit für ein hinreichend großes $\lambda > 1$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 3.12., vor der Vorlesung**.