Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung SW18/19, Serie 08
Prof. Dr. G. Wang 4.11.2018
MSc. Th. Körber

Aufgabe 1 (*das relaxierte Funktional*) (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F} : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Wie in der Vorlesung ist dasrelaxierte Funktional $\mathrm{sc}^-(\mathcal{F})$ definiert durch

$$\mathrm{sc}^-(\mathcal{F})(u) := \sup\{\Phi(u) | \Phi : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist UHS und } \Phi \leq \mathcal{F}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{sc}^-(\mathcal{F})$ unterhalbstetig ist.

Aufgabe 2 (Γ-*Konvergenz*) (4 Punkte)

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\mathcal{F}_\epsilon(x) = \epsilon x e^{-2\epsilon^2 x^2}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\Gamma - \lim_{\epsilon \to \infty} \mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{F}$ mit

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{-1/2}, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie zudem, dass $\mathcal{F}_\epsilon$ punktweise gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 3 (Γ-*Konvergenz*) (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}_k, \mathcal{F}, \mathcal{G}_k, \mathcal{G} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionale.
a) Sei $\Gamma - \lim \mathcal{F}_k = \mathcal{F}$ und $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $\Gamma - \lim(\mathcal{F}_k + \mathcal{G}) = \mathcal{F} + \mathcal{G}$.
b) $\Gamma - \lim \mathcal{F}_k = \mathcal{F}$ und $\Gamma - \lim \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$ impliziert nicht notwendigerweise, dass $\Gamma - \lim(\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_k) = \mathcal{F} + \mathcal{G}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Sei $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U}_a := \{u \in L^1(0,1) : \int_0^1 u dx = a\}$ und $\mathcal{F} : \mathcal{U}_a \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 f(u) dx.$$

a) Man zeige, dass $\inf_{u \in \mathcal{U}_a} \mathcal{F}(u) = Cf(a)$, wobei Cf die konvexe Einhüllende von f bezeichnet.
b) Wird das Infimum von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{U}_a$ immer angenommen? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Geben Sie ein Beispiel für ein f und a an, so dass das Minimierungsproblem $\mathcal{F} \to \min$ in $\mathcal{U}_a$, aber nicht in $\mathcal{U}_a \cap C^0([0,1])$, lösbar ist.

Hinweis: Sie können für a) ohne Beweis benutzen, dass für alle $z \in \mathbb{R}$

$$Cf(z) = \inf\{\lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_2) : z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}; \lambda[0,1]\}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 11.12., vor der Vorlesung**.