
Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$. F heißt *unterhalbstetig* in $x \in X$, falls für alle $t < F(x)$ eine Umgebung U von x existiert, sodass $t < F(y)$ für alle $y \in U$. Sei $\mathcal{N}(x)$ die Menge aller Umgebungen von x.
a) Zeigen Sie, dass F genau dann unterhalbstetig in $x \in X$ ist, wenn $F(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$.
b) X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Zeigen Sie, dass F genau dann unterhalbstetig in $x \in X$ ist, wenn $F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$ für jede Folge x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
c) Zeigen Sie, dass $sc^- F(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$.
d) X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Zeigen Sie, dass $sc^- F$ der Γ-Limes von $F_n := F$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega = \Pi_{i=1}(a_i, b_i)$ ein offener Quader in $\mathbb{R}^n$ und sei $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Wir setzen nun f periodisch auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort und definieren für $k \in \mathbb{N}$ $f_k(x) := f(kx)$. Zeigen Sie mithilfe der folgenden 4 Schritten, dass für $1 \leq p < \infty$

$$f_k \rightharpoonup \bar{f} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)dx \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für } k \to \infty.$$

1. $\|f_k\|_p \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{k\to\infty} \int_D f_k(x)dx = \frac{|D|}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)dx$ für alle achsenparallelen Würfel $D \subset \Omega$.
3. $\forall\, \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\, E \subset \Omega$ messbar, $|E| < \delta\ \forall\, k \in \mathbb{N}$: $\int_E |f_k|^p dx < \epsilon$.
4. $\int_\Omega (f_n - \bar{f}) g dx \to 0$ für alle $g \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (dies ist äquivalent zu $f_n \rightharpoonup \bar{f}$ in L^p).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{falls } 0 \leq x < \lambda \\ b & \text{falls } \lambda \leq x < 1. \end{cases}$$

Sei h periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt und $w_j(x) = h(jx)$. Bestimmen Sie das durch $\{w_j\}$ erzeugte Young Maß.
b) Sei $h : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Setze h periodisch auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort und definiere $w_j(x) = h(jx)$. Bestimmen Sie das durch $\{w_j\}$ erzeugte Young Maß.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für eine Kurve $\{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1]\}$ ist das Länge-Funktional definiert durch

$$\mathcal{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2}dx.$$

Die Zick-Zack-Folge von $\mathcal{L}$ ist

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{i}{n}, & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+\frac{1}{2}}{n}; \\ \frac{i+1}{n} - x, & \frac{i+\frac{1}{2}}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie das durch $\{u_n'\}$ erzeugte Young Maß.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 20.12., vor der Vorlesung**.