

Funktionalanalysis (Sommersemester 2014)

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1	Metrische und normierte Räume	3
2	Kompaktheit in metrischen Räumen	10
3	Existenz linearer Funktionale	18
4	Das Kategorieprinzip von Baire	26
5	Die Dualräume der L^p -Räume	29
6	Der Dualraum von $C^0(X)$	40
7	Schwache Konvergenz	51
8	Hilbertraumtheorie	59
9	Kompakte Operatoren	68

Einleitung

Das Thema dieser Vorlesung ist die Lineare Funktionalanalysis. Generell geht es dabei um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Gleichungen

$$Lx = y,$$

das heißt $L : X \rightarrow Y$ ist eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen:

$$L(\lambda x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Lx_1 + \lambda_2 Lx_2 \quad \text{für alle } x_{1,2} \in X, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}.$$

Für endlichdimensionale Vektorräume ist dieses Problem in der Linearen Algebra vollständig behandelt worden; das Interesse gilt nun dem Fall $\dim X = \infty$. In diesem Zusammenhang nennt man L auch einen linearen Operator. Ein wichtiges Beispiel ist das Dirichletproblem für die Poissongleichung auf einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Setze $X = \{u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y = C^0(\Omega)$. Dann ist das Dirichletproblem gleichbedeutend mit der Lösung der Gleichung $Lu = f$ für $L = -\Delta : X \rightarrow Y$. Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Lösungsmethoden der Linearen Algebra nicht oder jedenfalls nicht unmittelbar anwendbar sind.

Beispiel 0.1 Betrachte den Raum

$$X = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation $(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})_i = \lambda x_i + \mu y_i$. Definiere die linearen Abbildungen, genauer Endomorphismen,

$$\begin{aligned} A : X &\rightarrow X, & A(x_1, x_2, \dots) &= (0, x_1, x_2, \dots), \\ B : X &\rightarrow X, & B(x_1, x_2, \dots) &= (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

A ist injektiv, aber nicht surjektiv; B ist surjektiv, aber nicht injektiv. Im Endlichdimensionalen wäre das nicht möglich.

Beispiel 0.2 Betrachte auf dem Raum $X = C^0([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ die lineare Abbildung

$$L : X \rightarrow X, \quad (Lu)(t) = (\sin t) u(t).$$

Angenommen, L hat einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Funktion $u \in X$, nicht die Nullfunktion, mit $Lu = \lambda u$ bzw.

$$(\sin t) u(t) = \lambda u(t) \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Es folgt $\{t \in [-\pi, \pi] : u(t) \neq 0\} \subset \{t : \sin t = \lambda\}$. Die rechte Menge ist aber endlich, somit ist u identisch Null, Widerspruch.

Auch zentrale Aussagen der Analysis lassen sich nicht einfach in unendlichdimensionale Räume übertragen.

Beispiel 0.3 Betrachte den Raum

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Nun gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{x}^k\|_\infty = 1 \quad \text{für } \mathbf{x}^k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{R}).$$

Aber \mathbf{x}^k hat keine konvergente Teilfolge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, denn $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l\|_\infty = 1$ für $k \neq l$.

Grundsätzlich müssen zu den Methoden der Linearen Algebra geeignete topologische Konzepte hinzukommen, um unendlichdimensionale Probleme zu behandeln. Im \mathbb{R}^n führt jede Norm auf die gleiche Topologie, wie wir jetzt zeigen.

Satz 0.1 (Äquivalenz der Normen auf \mathbb{R}^n) Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent: zu $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ gibt es $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ mit

$$\lambda \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \Lambda \|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Insbesondere führen alle Normen zur gleichen Topologie bzw. Konvergenzbegriff.

BEWEIS: Wir können $X = \mathbb{R}^n$ annehmen, denn sonst wählen wir eine Basis v_1, \dots, v_n und betrachten auf \mathbb{R}^n die Normen $\|x\|_{1,2} = \|\varphi(x)\|_{1,2}$ mit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Weiter reicht es zu zeigen, dass eine gegebene Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist. Nun gilt

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^n \|e_i\|}_{=: \Lambda}.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$, erfüllt wegen der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(y)| = \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \Lambda \|x - y\|_\infty,$$

d.h. f ist Lipschitzstetig mit Konstante Λ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Setze

$$\lambda = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}.$$

Die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$ ist abgeschlossen und beschränkt. Da f stetig, wird das Infimum angenommen und es folgt $\lambda > 0$. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \|x\|_\infty \geq \lambda \|x\|_\infty.$$

□

Zur Ergänzung sei bemerkt, dass zwei Metriken auf \mathbb{R}^n nicht notwendig dieselbe Topologie liefern. Ein triviales Beispiel ist die diskrete Metrik $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$, bezüglich der alle Mengen offen sind. Für die Euklidische Metrik ist das natürlich nicht der Fall. Wichtiger ist hier allerdings die Tatsache, dass die Äquivalenz der Normen auf unendlichdimensionalen Räumen nicht notwendig gilt.

Beispiel 0.4 Auf $X = C^0(I)$, $I = [0, 1]$, haben wir die beiden Normen(!)

$$\|u\|_{C^0(I)} = \max_{x \in I} |u(x)| \quad \text{und} \quad \|u\|_{L^2(I)} = \left(\int_0^1 u(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Die Standardabschätzung liefert $\|u\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{C^0(I)}$, die Normen sind aber nicht äquivalent. Betrachte die Folge

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt dann $\|u_n\|_{C^0(I)} = 1$ und $\|u_n\|_{L^2(I)} = \frac{1}{\sqrt{3n}} \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$.

1 Metrische und normierte Räume

Definition 1.1 Sei X eine Menge. Dann heißt $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ Metrik und (X, d) metrischer Raum, falls Folgendes gilt:

- (1) $d(x, y) = 0$ genau wenn $x = y$ (Positivität),
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$ (Symmetrie),
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Definition 1.2 $U \subset (X, d)$ heißt offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subset U$, wobei $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Beispiel 1.1 $B_r(x)$ ist offen, denn für $y \in B_r(x)$ gilt $B_\varrho(y) \subset B_r(x)$ mit $\varrho = r - d(x, y) > 0$. Für $z \in B_\varrho(y)$ liefert nämlich die Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(x, y) = r.$$

Lemma 1.1 (Topologie auf metrischen Räumen) Sei (X, d) metrischer Raum.

- (1) Ist U_λ , $\lambda \in \Lambda$, Familie von offenen Mengen in X , so ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ offen.
- (2) Ist U_i , $i \in I$, endliche Familie von offenen Mengen in X , so ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen.
- (3) Zu $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gibt es offene U_1, U_2 mit $x_i \in U_i$ für $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Bemerkungen. Sei X eine Menge. Ein System \mathcal{T} von Teilmengen von X heißt Topologie, wenn \mathcal{T} abgeschlossen ist unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten, und außerdem $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ gilt. Die Mengen in \mathcal{T} nennt man dann offen, ihre Komplemente abgeschlossen. Jedes $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ heißt (offene) Umgebung von x . Eine Folge $x_k \in X$ konvergiert gegen x bezüglich \mathcal{T} , falls jede Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn die Eigenschaft (3) aus dem Lemma erfüllt ist, heißt die Topologie Hausdorffsch und (X, \mathcal{T}) Hausdorffraum.¹

¹Felix Hausdorff, 1868-1942

Für Mengen $A \subset (X, d)$ sind folgende weitere Bezeichnungen üblich:

$$\begin{aligned} \text{int } A &= \{x \in X : \text{es gibt ein } r > 0 \text{ mit } B_r(x) \subset A\}, \\ \bar{A} &= \{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ für alle } r > 0\}, \\ \partial A &= \bar{A} \setminus \text{int } A, \\ \text{diam } A &= \sup_{x, y \in A} d(x, y). \end{aligned}$$

Eine Menge A heißt beschränkt, falls $\text{diam } A < \infty$. Weiter heißt eine Folge x_k in (X, d)

$$\text{konvergent} \Leftrightarrow \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x) = 0,$$

$$\text{Cauchyfolge} \Leftrightarrow \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } K \in \mathbb{N} \text{ mit } d(x_k, x_l) < \varepsilon \text{ für alle } k, l > K.$$

Definition 1.3 (Vollständigkeit) Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Satz 1.1 (Vervollständigung nach Cantor)² Zu jedem metrischen Raum (X, d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum (\hat{X}, \hat{d}) und eine isometrische (abstandstreue) Abbildung

$$J : (X, d) \rightarrow (\hat{X}, \hat{d}) \quad \text{mit } J(X) \text{ dicht in } \hat{X}.$$

Eindeutigkeit: ist (\tilde{X}, \tilde{d}) vollständig und $\tilde{J} : X \rightarrow \tilde{X}$ isometrisch mit $\tilde{J}(X)$ dicht in \tilde{X} , so gibt es genau eine Isometrie (abstandstreue Bijektion) $\Phi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{J} = \Phi \circ J$.

$$\begin{array}{ccc} & (X, d) & \\ & \swarrow J & \searrow \tilde{J} \\ (\hat{X}, \hat{d}) & \xrightarrow{\Phi} & (\tilde{X}, \tilde{d}) \end{array}$$

BEWEIS: Zur Konstruktion definieren wir $\hat{X} = \text{CF}(X) / \sim$, wobei

$$\begin{aligned} \text{CF}(X) &= \{\mathbf{x} = (x^i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbf{x} \text{ ist Cauchyfolge in } X\}, \\ \mathbf{x} \sim \mathbf{y} &\Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} d(x^i, y^i) = 0. \end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert, denn für i, j hinreichend groß ist $d(x^i, x^j), d(y^i, y^j) < \frac{\varepsilon}{2}$, also folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d(x^i, y^i) \leq d(x^i, x^j) + d(x^j, y^j) + d(y^j, y^i) < d(x^j, y^j) + \varepsilon,$$

bzw. aus Symmetriegründen $|d(x^i, y^i) - d(x^j, y^j)| < \varepsilon$, das heißt $d(x^i, y^i)$ ist eine Cauchyfolge in \mathbb{R} . Ist $(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(x^{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so definieren beide dasselbe Element von \hat{X} , denn es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x^k, x^{i_k}) = 0.$$

Wir machen \hat{X} zu einem metrischen Raum durch

$$\hat{d}([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x^i, y^i).$$

²Georg Cantor, 1845-1918

Der Grenzwert hängt nicht von der Wahl der repräsentierenden Folgen ab. Die Eigenschaften einer Metrik sind leicht nachzuprüfen, insbesondere

$$\hat{d}([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} d(x^i, y^i) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow [\mathbf{x}] = [\mathbf{y}].$$

Definiere weiter

$$J : X \rightarrow \hat{X}, J(x) = [(x, x, \dots)].$$

Es gilt $\hat{d}(J(x), J(y)) = d(x, y)$, also ist J isometrisch. Für $[\mathbf{x}] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([\mathbf{x}], J(x^k)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x^i, x^k) < \varepsilon \quad \text{für } k \text{ hinreichend groß.}$$

Also ist $J(X)$ dicht in \hat{X} . Wir zeigen nun dass (\hat{X}, \hat{d}) vollständig ist. Sei $[\mathbf{x}_k]$ eine Cauchyfolge in \hat{X} , das heißt

$$(1.1) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_k^i, x_l^i) < \varepsilon \quad \text{für } k, l \geq k(\varepsilon).$$

Durch Weglassen von endlich vielen Gliedern in jeder Folge \mathbf{x}_k können wir annehmen, dass

$$d(x_k^i, x_k^j) < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N}.$$

Jetzt betrachte die Diagonalfolge $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$, also $y^k = x_k^k$. Für $k, l \geq k(\varepsilon)$ gilt

$$d(y^k, y^l) \leq d(x_k^k, x_k^i) + d(x_k^i, x_l^i) + d(x_l^i, x_l^l) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{l}.$$

Somit ist \mathbf{y} eine Cauchyfolge. Wir zeigen, dass $[\mathbf{x}_k]$ gegen $[\mathbf{y}]$ konvergiert, und zwar ist

$$\begin{aligned} d(x_k^i, y^i) &\leq d(x_k^i, x_k^j) + d(x_k^j, x_i^j) + d(x_i^j, x_i^i) \\ &< \frac{1}{k} + d(x_k^j, x_i^j) + \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Mit $j \rightarrow \infty$ folgt $d(x_k^i, y^i) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \frac{1}{i}$ für $i, k \geq k(\varepsilon)$ nach (1.1), also gilt

$$\hat{d}([\mathbf{x}_k], [\mathbf{y}]) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_k^i, y^i) \leq \frac{1}{k} + \varepsilon \quad \text{für } k \geq k(\varepsilon),$$

das heißt $\hat{d}([\mathbf{x}_k], [\mathbf{y}]) \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$ wie behauptet. Damit ist die Konstruktion von (\hat{X}, \hat{d}) fertig; wir kommen zur Eindeutigkeit. Die Abbildung $J : X \rightarrow \hat{X}$ ist isometrisch und insbesondere injektiv. Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi : J(X) \rightarrow \tilde{X}, \Phi(J(x)) = \tilde{J}(x),$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\Phi(J(x)), \Phi(J(y))) &= \tilde{d}(\tilde{J}(x), \tilde{J}(y)) \\ &= d(x, y) \quad (\text{da } \tilde{J} \text{ isometrisch}) \\ &= \hat{d}(J(x), J(y)) \quad (\text{da } J \text{ isometrisch}). \end{aligned}$$

Somit ist Φ auf $J(X)$ isometrisch, insbesondere gleichmäßig stetig. Da $J(X)$ dicht in \hat{X} und \tilde{X} vollständig, existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\Phi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ (Serie 1, Aufgabe 1), und Φ ist isometrisch. Wegen $\Phi(J(X)) = \tilde{J}(X)$ ist $\Phi(\hat{X})$ dicht in \tilde{X} , und außerdem vollständig bezüglich \tilde{g} . Somit ist $\Phi(\hat{X})$ abgeschlossen (Serie 1, Aufgabe 2) und $\Phi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ ist surjektiv, also eine Isometrie. \square

Beispiel 1.2 Im Beweis wurden die reellen Zahlen als bekannt vorausgesetzt. Cantor hat das Verfahren benutzt, um \mathbb{R} als Quotient $\text{CF}(\mathbb{Q})/\sim$ zu konstruieren, dies erfordert nur geringfügige Änderungen.

Der folgende Begriff dürfte wohlbekannt sein, er wurde in der Einleitung schon benutzt.

Definition 1.4 (Norm) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Eine Funktion $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt Norm, falls gilt:

- (1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Positivität),
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ (Halblinearität),
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$ (Dreiecksungleichung).

Wir haben dann auf X die induzierte Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$. Ist X mit dieser Metrik vollständig, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum.³

Ein normierter Raum ist stets ein Vektorraum, während ein metrischer Raum auf irgendeiner Menge gegeben sein kann.

Beispiel 1.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Für \mathcal{L}^n -messbare $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$f \sim g \iff \mathcal{L}^n(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mathcal{L}^n \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \inf \{s > 0 : \mathcal{L}^n(\{|f| > s\}) = 0\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Damit kann der Raum der L^p -Funktionen wie folgt definiert werden:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\} / \sim.$$

Nach dem Satz von Fischer-Riesz ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ein Banachraum. Nun haben wir die offensichtliche isometrische Abbildung

$$J : (C_c^0(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}) \rightarrow (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}).$$

Man beachte, dass $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ auf $C_c^0(\Omega)$ tatsächlich eine Norm ist. $C_c^0(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ im Fall $p < \infty$ (siehe Skript Kuwert Analysis 3, Satz 6.10). Für $p < \infty$ können wir $L^p(\Omega)$ als (konkrete Realisierung der) Vervollständigung von $(C_c^0(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ansehen.

Die Konstruktion als Äquivalenzklassen von \mathbb{Q} -Cauchyfolgen beweist die Existenz der reellen Zahlen, man greift aber in der Analysis nie auf sie zurück, weil die Charakterisierung durch Axiome einfacher und effizienter ist. Auch im Fall der Vervollständigung eines metrischen Raums ist es ebenfalls günstig, eine möglichst konkrete Realisierung zu haben. Zum Beispiel ist es wünschenswert, die Elemente von $L^p(\Omega)$ durch (fast überall definierte) Funktionen zu beschreiben, und nicht nur als Äquivalenzklassen von L^p -Cauchyfolgen in $C_c^0(\Omega)$. Genau das leistet der Satz von Fischer-Riesz.

³Stefan Banach, 1892-1945

Definition 1.5 Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ heißt beschränkt, falls gilt:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

Die Zahl $\|A\|$ heißt Operatornorm von A . Der Raum

$$L(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y : A \text{ linear, } \|A\| < \infty\}$$

ist mit $\|\cdot\|$ ein normierter Raum.

Lemma 1.2 (Stetigkeitskriterien für lineare Abbildungen) Für eine lineare Abbildung $A : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) A ist beschränkt.
- (2) A ist stetige Abbildung.
- (3) A ist stetig im Punkt $0 \in X$.

BEWEIS: Aus (1) folgt

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|,$$

das heißt die Abbildung ist sogar Lipschitzstetig mit Konstante $\|A\|$. Sei umgekehrt A stetig in $0 \in X$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|Ax\| = \|A(x) - A(0)\| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } \|x\| = \|x - 0\| \leq \delta.$$

Für $x \neq 0$ folgt daraus die Abschätzung

$$\|Ax\| = \frac{\|x\|}{\delta} \underbrace{\left\| A\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right) \right\|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{\delta} \|x\|.$$

□

Satz 1.2 (Vollständigkeit von $L(X, Y)$) Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum. Dann ist $L(X, Y)$, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum.

BEWEIS: Sei A_i Cauchyfolge in $L(X, Y)$, also

$$\|A_i x - A_j x\| \leq \|A_i - A_j\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \quad \text{für } i, j \geq I(\varepsilon).$$

Somit ist $A_i x$ Cauchyfolge, und $Ax := \lim_{i \rightarrow \infty} A_i x$ existiert. Es ist klar dass A linear ist, weiter gilt

$$\left| \|A_i\| - \|A_j\| \right| \leq \|A_i - A_j\| < \varepsilon \quad \text{für } i, j \geq I(\varepsilon).$$

Also existiert $\Lambda := \lim_{i \rightarrow \infty} \|A_i\|$, und es folgt

$$\|Ax\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|A_i x\| \leq \Lambda \|x\|,$$

das heißt $A \in L(X, Y)$. Schließlich haben wir

$$\|Ax - A_j x\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|A_i x - A_j x\| < \varepsilon \|x\| \quad \text{für } j \geq I(\varepsilon),$$

also $\|A - A_j\| < \varepsilon$ für $j \geq I(\varepsilon)$. □

Definition 1.6 (Dualraum) Sei X ein normierter Raum. Dann heißt der Banachraum $X' = L(X, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}), versehen mit der Operatornorm, Dualraum von X .

Satz 1.3 (Quotientenräume) Sei X ein Banachraum und V ein abgeschlossener Unterraum. Dann wird der Quotient X/V ein Banachraum mit der Norm

$$\|[x]\| = \inf_{v \in V} \|x + v\|.$$

Die Projektion $p: X \rightarrow X/V$ ist offen und hat Operatornorm $\|p\| = 1$ (außer wenn $V = X$).

BEWEIS: Wir beginnen mit den Normeigenschaften. Ist $\|[x]\| = 0$, so gibt es $v_k \in V$ mit $\|x + v_k\| \rightarrow 0$, also $v_k \rightarrow -x$. Da V abgeschlossen, folgt $x \in V$ bzw. $[x] = 0$. Weiter gilt für $\lambda \neq 0$ (der Fall $\lambda = 0$ ist klar)

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{v \in V} \|\lambda x + v\| = |\lambda| \inf_{v \in V} \|x + \frac{1}{\lambda}v\| = |\lambda| \|[x]\|.$$

Für die Dreiecksungleichung berechnen wir

$$\begin{aligned} \|[x_1] + [x_2]\| &= \|[x_1 + x_2]\| \\ &= \inf_{v_1, v_2 \in V} \|x_1 + x_2 + v_1 + v_2\| \\ &\leq \inf_{v_1, v_2 \in V} (\|x_1 + v_1\| + \|x_2 + v_2\|) \\ &= \|[x_1]\| + \|[x_2]\|. \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, dass X/V mit dieser Norm ein Banachraum ist. Es gilt wegen $\|[y] - [x]\| = \|[y - x]\| = \inf_{v \in V} \|y - x + v\|$

$$(1.2) \quad \|[y] - [x]\| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt } \tilde{y} \in [y] \text{ mit } \|\tilde{y} - x\| < \varepsilon.$$

Sei $[x_i]$ Cauchyfolge in X/V . Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $\|[x_{i+1}] - [x_i]\| < 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir bestimmen nun induktiv $\tilde{x}_i \in [x_i]$ mit

$$(1.3) \quad \|\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i\| < 2^{-i} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Setze $\tilde{x}_1 = x_1$. Ist $\tilde{x}_i \in [x_i]$ schon gefunden für ein $i \in \mathbb{N}$, so ist

$$\|[x_{i+1}] - [\tilde{x}_i]\| = \|[x_{i+1}] - [x_i]\| < 2^{-i},$$

also gibt es $\tilde{x}_{i+1} \in [x_{i+1}]$ mit (1.3). Da X Banachraum, existiert $\tilde{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{x}_i$ und es gilt

$$\|[x_i] - [\tilde{x}]\| = \|[\tilde{x}_i] - [\tilde{x}]\| = \|[\tilde{x}_i - \tilde{x}]\| \leq \|\tilde{x}_i - \tilde{x}\| \rightarrow 0.$$

Damit ist die Vollständigkeit von X/V bewiesen. Ist nun $\|[y] - [x]\| < r$, so gibt es nach (1.2) ein $\tilde{y} \in [y]$ mit $\tilde{y} \in B_r(x)$, das heißt es gilt $B_r(p(x)) \subset p(B_r(x))$. Ist $U \subset X$ offen und $x \in U$, so gilt $B_r(x) \subset U$ für ein $r > 0$ und damit $B_r(p(x)) \subset p(U)$, das heißt $p(U)$ ist offen. Die Ungleichung $\|[x]\| \leq \|x\|$, also $\|p\| \leq 1$, wurde schon oben benutzt. Sei schließlich V echter Unterraum, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $\|[x]\| = \inf_{v \in V} \|x + v\| > 0$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{x} \in [x]$ mit

$$\|\tilde{x}\| < (1 + \varepsilon)\|[x]\| = (1 + \varepsilon)\|[\tilde{x}]\| = (1 + \varepsilon)\|p(\tilde{x})\| \leq (1 + \varepsilon)\|p\| \|\tilde{x}\|.$$

Dies zeigt $\|p\| \geq 1$. □

Wir kommen schließlich zu Normen, die von einem Skalarprodukt induziert sind.

Definition 1.7 (Skalarprodukt) Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, wenn folgende Regeln erfüllt sind:

- (1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Sesquilinearform:
$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \\ \langle x, \lambda y + \mu z \rangle &= \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \bar{\mu} \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$
- (2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
- (3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit: $\langle x, x \rangle \geq 0$, Gleichheit genau wenn $x = 0$.

Die Euklidische Norm von $x \in X$ ist $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Satz 1.4 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Sei $X, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarproduktraum. Dann gilt für alle $x, y \in X$:

- (1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Ungleichung von Cauchy-Schwarz).
- (2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Insbesondere ist die Euklidische Norm eine Norm.

BEWEIS: Ersetzen wir x durch λx (bzw. y durch λy), so werden beide Seiten von (1) mit demselben Faktor $|\lambda|$ multipliziert. Wir können daher $\|x\| = \|y\| = 1$ annehmen. Weiter können wir $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^+$ erreichen, indem wir x mit geeignetem $\lambda = e^{i\theta}$ multiplizieren. Mit diesen Normierungen folgt

$$\|x\| \|y\| - \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 \geq 0.$$

Daraus folgt weiter, nun für beliebige $x, y \in X$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Damit erfüllt $\|\cdot\|$ die Dreiecksungleichung. Die weiteren Eigenschaften einer Norm ergeben sich direkt aus der Definition. \square

Es stellt sich die Frage, wann eine Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert ist.

Bemerkung 1.1 Ist $\|\cdot\|$ eine Skalarproduktnorm auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X , so ergibt sich durch Ausmultiplizieren die Parallelogrammgleichung

$$(1.4) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Umgekehrt ist eine Norm $\|\cdot\|$ mit (1.4) eine Skalarproduktnorm, und zwar ist das zugehörige Skalarprodukt durch folgende Polarisationsformel gegeben:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \quad \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Mithilfe der Parallelogrammgleichung kann man zeigen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich alle Regeln für ein Skalarprodukt erfüllt.

Definition 1.8 Ein Hilbertraum⁴ ist ein Skalarproduktraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, der bezüglich der Skalarproduktnorm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist.

Beispiel 1.4 Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist der Raum $L^2(\Omega)$ der quadratintegrierbaren Funktionen mit

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

ein Hilbertraum nach dem Satz von Fischer-Riesz.

2 Kompaktheit in metrischen Räumen

Definition 2.1 Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (X, d) heißt kompakt, falls gilt: jede Familie $(U_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ von offenen Mengen mit $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$ besitzt eine Teilfamilie $(U_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda'}$ mit Λ' endlich und $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_{\lambda}$.

Satz 2.1 (Äquivalenz der Kompaktheitsbegriffe) Sei (X, d) metrischer Raum. Für $K \subset X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) K ist kompakt.
- (2) K ist vollständig (mit der induzierten Metrik) und präkompakt, das heißt für jedes $\varrho > 0$ lässt sich K durch endlich viele Kugeln $B_{\varrho}(x)$, $x \in K$, überdecken.
- (3) K ist folgenkompakt: jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in K besitzt eine Teilfolge, die gegen ein $x \in K$ konvergiert.

BEWEIS: (3) \Rightarrow (2): Die Vollständigkeit ist klar, denn mit einer Teilfolge konvergiert schon die ganze Folge. Wäre K nicht präkompakt, so wähle induktiv $x_k \in K$ mit $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_{\varrho}(x_i)$. Für $k \neq l$ gilt dann $d(x_k, x_l) \geq \varrho$, also kann die Folge x_k keine konvergente Teilfolge haben, Widerspruch zu (3).

(2) \Rightarrow (1): Angenommen $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$, aber K wird nicht durch endlich viele der U_{λ} überdeckt. Konstruiere sukzessive Kugeln $B_k = B_{2^{-k}}(x_k)$ mit $x_k \in K$ und $B_k \cap B_{k-1} \neq \emptyset$, so dass $B_k \cap K$ nicht durch endlich viele der U_{λ} überdeckt wird. Ist B_{k-1} schon gefunden, so überdecke $B_{k-1} \cap K$ durch endlich viele Kugeln $B_{2^{-k}}(y_i)$, $1 \leq i \leq N$, mit $y_i \in K$ und $B_{2^{-k}}(y_i) \cap B_{k-1} \neq \emptyset$. Für wenigstens ein i wird $B_{2^{-k}}(y_i) \cap K$ nicht durch endlich viele der U_{λ} überdeckt. Im Induktionsanfang wende dieses Argument an mit $B_0 := K$. Nach Konstruktion ist x_k eine Cauchyfolge, also $x_k \rightarrow x \in K$. Es ist $x \in U_{\lambda}$ für ein λ , also $B_k \subset U_{\lambda}$ für k hinreichend groß, im Widerspruch zur Konstruktion.

(1) \Rightarrow (3): Angenommen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt in K . Zu jedem $x \in K$ gibt es dann ein $\varrho > 0$ mit $x_k \in B_{\varrho}(x)$ höchstens für endlich viele k . Denn sonst finden wir induktiv $k_1 < k_2 < \dots$ mit $x_{k_j} \in B_{\frac{1}{j}}(x)$, also $x_{k_j} \rightarrow x$ im Widerspruch zur Annahme. Wähle nun eine endliche Teilüberdeckung von K mit solchen Kugeln. Es folgt $x_k \in K$ nur für endlich viele k , ein Widerspruch. \square

⁴David Hilbert, 1862-1943

Beispiel 2.1 Sei $X, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein unendlichdimensionaler Skalarproduktraum. Mit dem Verfahren von Gram-Schmidt findet man dann eine Folge e_1, e_2, \dots in X mit $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Es folgt

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \text{für } i \neq j.$$

Es gibt damit keine Teilfolge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ konvergiert. Das bedeutet auch: abgeschlossene und beschränkte Mengen sind nicht notwendig kompakt.

Das Verfahren von Gram-Schmidt ist auf Skalarprodukträume beschränkt, man hat aber in beliebigen normierten Räumen den folgenden Ersatz.

Lemma 2.1 (fast orthogonales Element) Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $V \subset X$ ein abgeschlossener, echter Teilraum. Dann gibt es zu $\theta < 1$ ein $x_\theta \in X$ mit

$$\text{dist}(x_\theta, V) \geq \theta \quad \text{und} \quad \|x_\theta\| = 1.$$

BEWEIS: Wähle $x \in X \setminus V$. Da V abgeschlossen, gilt $\text{dist}(x, V) > 0$ und es gibt ein $v_\theta \in V$ mit $\|x - v_\theta\| \leq \frac{1}{\theta} \text{dist}(x, V)$. Setze

$$x_\theta = \frac{x - v_\theta}{\|x - v_\theta\|}.$$

Es folgt für alle $v \in V$

$$\|x_\theta - v\| = \frac{1}{\|x - v_\theta\|} \left\| x - \underbrace{v_\theta - \|x - v_\theta\|v}_{\in V} \right\| \geq \frac{\text{dist}(x, V)}{\|x - v_\theta\|} \geq \theta.$$

□

Satz 2.2 (Heine-Borel) Für einen normierten Raum X gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \dim X < \infty.$$

BEWEIS: Die Implikation \Leftarrow folgt aus der Äquivalenz der Normen, Satz 0.1, und dem Satz von Bolzano-Weierstraß. Für \Rightarrow wähle induktiv mit Lemma 2.1 eine Folge $x_k \in X$ mit

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{und} \quad \text{dist}(x_k, \text{Span}\{x_1, \dots, x_{k-1}\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. □

Für die Existenz von Lösungen von Gleichungen ist die Kompaktheit ein zentraler Begriff der Analysis. In der Funktionalanalysis spielen Kompaktheitskriterien für Teilmengen von Banachräumen (oder metrischen Räumen) eine bedeutende Rolle. Ein bekanntes Beispiel ist der Satz von Arzelà-Ascoli, den wir nun behandeln wollen.

Definition 2.2 Seien X, Y metrische Räume. Wir setzen

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \{f : X \rightarrow Y : f(X) \text{ ist beschränkt}\}, \\ C^0(X, Y) &= \{f : X \rightarrow Y : f \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Satz 2.3 Seien X, Y metrische Räume, Y vollständig.

- (1) $B(X, Y)$ ist vollständiger metrischer Raum mit $d_B(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.
- (2) $(C^0 \cap B)(X, Y)$ ist abgeschlossen in $(B(X, Y), d_B)$, insbesondere ist $(C^0 \cap B)(X, Y)$ vollständiger metrischer Raum mit d_B .

BEWEIS: Es ist klar, dass $d_B(f, g)$ eine Metrik auf $B(X, Y)$ ist. Sei f_k eine Cauchyfolge in $B(X, Y)$, also

$$d(f_k(x), f_l(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X, k, l \geq k(\varepsilon).$$

Da Y vollständig, existiert $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Mit $l \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$d(f_k(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X, k \geq k(\varepsilon),$$

also $d_B(f_k, f) \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$. Außerdem ist f beschränkt, denn für $k = k(\varepsilon)$ ist

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d(f(x), f_k(x))}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x), f_k(x_0))}_{\leq \text{diam } f_k(X) < \infty} + \underbrace{d(f_k(x_0), f(x_0))}_{\leq \varepsilon}.$$

Ist f_k stetig für $k = k(\varepsilon)$, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$ für $d(x, x_0) < \delta$, und die Abschätzung liefert

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \underbrace{d(f(x), f_k(x))}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x), f_k(x_0))}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(f_k(x_0), f(x_0))}_{\leq \varepsilon} < 3\varepsilon.$$

Also ist $C^0 \cap B(X, Y)$ abgeschlossene Teilmenge. □

Definition 2.3 Die Oszillation von $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ ist die Funktion

$$\omega_f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty], \omega_f(\delta) = \sup_{d(x_1, x_2) < \delta} d(f(x_1), f(x_2)).$$

Gilt $\omega_f(\delta) \rightarrow 0$ mit $\delta \rightarrow 0$, so heißt f gleichmäßig stetig. Eine Familie \mathcal{F} von Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ heißt gleichgradig stetig, falls $\sup_{f \in \mathcal{F}} \omega_f(\delta) \rightarrow 0$ mit $\delta \rightarrow 0$.

Alternativ kann die gleichgradige Stetigkeit wie folgt formuliert werden:

für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d(x_1, x_2) < \delta$.

Beispiel 2.2 Sei $0 < \alpha \leq 1$. Die α -Hölderkonstante von $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ ist

$$[f]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha}.$$

f heißt α -Hölderstetig wenn $[f]_\alpha < \infty$. Offenbar gilt

$$d(f(x), f(y)) = \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha} d(x, y)^\alpha \leq [f]_\alpha \delta^\alpha \quad \text{falls } d(x, y) \leq \delta.$$

Die Oszillation erfüllt also die Abschätzung

$$(2.5) \quad \omega_f(\delta) \leq [f]_\alpha \delta^\alpha.$$

Eine Hölderstetige Funktion ist also gleichmäßig stetig, und für jedes $\Lambda < \infty$ ist die Familie $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow Y : [f]_\alpha \leq \Lambda\}$ gleichgradig stetig.

Satz 2.4 (Arzelà-Ascoli) ⁵ Seien X, Z metrische Räume, X kompakt und Z vollständig. Für $\mathcal{F} \subset C^0(X, Z)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) \mathcal{F} ist gleichgradig stetig und $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ ist relativ kompakt in Z für jedes $x \in X$.
- (2) Jede Folge f_k in \mathcal{F} hat eine Teilfolge f_{k_j} , die gleichmäßig gegen ein $f \in C^0(X, Z)$ gleichmäßig konvergiert.
- (3) \mathcal{F} ist relativ kompakt in $(C^0(X, Z), d_B)$.

Zur Erinnerung: eine Teilmenge eines metrischen (oder topologischen) Raums heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss kompakt ist. Die wesentliche Aussage des Satzes ist die Implikation (1) \Rightarrow (2), nämlich ein Kriterium für die Existenz gleichmäßig konvergenter Teilfolgen.

BEWEIS: (1) \Rightarrow (2) : Da X kompakt, gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subset X$. Zum Beispiel kann man dafür X mit endlich vielen Kugeln vom Radius $\frac{1}{\nu}$ überdecken für $\nu = 1, 2, \dots$; die Menge der Mittelpunkte ist dann dicht. Für jedes $x \in X$ hat die Folge $f_k(x)$ eine konvergente Teilfolge, also folgt mit einem Diagonalfolgenargument

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ existiert für alle } x \in D.$$

Für $x_1, x_2 \in D$ mit $d(x_1, x_2) \leq \delta$ folgt $d(f(x_1), f(x_2)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k(x_1), f_k(x_2))$, also

$$\omega_f(\delta) \leq \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} \omega_\varphi(\delta) =: \omega(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \rightarrow 0.$$

Somit ist $f : D \rightarrow Z$ gleichmäßig stetig, und es existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $f \in C^0(X, Z)$. Es bleibt zu zeigen, dass die Folge gleichmäßig gegen f konvergiert. Für $\delta > 0$ ist $\{B_\delta(x) : x \in D\}$ offene Überdeckung von X , also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{B_\delta(x) : x \in D_\delta\}$. Zu $x \in X$ gibt es ein $y \in D_\delta$ mit $d(x, y) < \delta$, und es folgt

$$\begin{aligned} d(f_k(x), f(x)) &\leq d(f_k(x), f_k(y)) + d(f_k(y), f(y)) + d(f(y), f(x)) \\ &\leq \max_{y \in D_\delta} d(f_k(y), f(y)) + 2\omega(\delta). \end{aligned}$$

Das Supremum über $x \in X$ liefert

$$d_B(f_k, f) \leq \max_{y \in D_\delta} d(f_k(y), f(y)) + 2\omega(\delta),$$

und schließlich folgt wie behauptet

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d_B(f_k, f) \leq 2\omega(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \rightarrow 0.$$

(2) \Rightarrow (3) : Nach (2) ist $\overline{\mathcal{F}}$ folgenkompakt, also folgt (3) aus Satz 2.1.

(3) \Rightarrow (1) : Wir zeigen als erstes, dass \mathcal{F} gleichgradig stetig ist. Nach Satz 2.1 ist $\overline{\mathcal{F}}$ präkompakt, das heißt zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\{f_1, \dots, f_N\} \subset \overline{\mathcal{F}}$ mit

$$\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(f_j),$$

⁵C. Arzelà, 1847-1912 und G. Ascoli, 1843-1896

das heißt zu $f \in \mathcal{F}$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, N\}$ mit $d_B(f, f_j) \leq \varepsilon$. Es folgt für $d(x, y) \leq \delta$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_j(x)) + d(f_j(x), f_j(y)) + d(f_j(y), f(y)) \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \omega_{f_j}(\delta) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Bilde das Supremum über alle $x, y \in X$, $d(x, y) \leq \delta$, und alle $f \in \mathcal{F}$:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \omega_f(\delta) \leq \max_{1 \leq j \leq N} \omega_{f_j}(\delta) + 2\varepsilon.$$

Lass nun $\delta \rightarrow 0$. Da $f_j \in \overline{\mathcal{F}}$ stetig und damit gleichmäßig stetig ist wegen X kompakt, gilt $\omega_{f_j}(\delta) \rightarrow 0$ mit $\delta \rightarrow 0$, also

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{f \in \mathcal{F}} \omega_f(\delta) \right) \leq 2\varepsilon.$$

Damit ist die gleichgradige Stetigkeit von \mathcal{F} bewiesen. Betrachte schließlich eine Folge $z_k = f_k(x)$ mit $f_k \in \mathcal{F}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt $f_k \rightarrow f \in C^0(X, Z)$ gleichmäßig, insbesondere $z_k = f_k(x) \rightarrow f(x)$. Damit sind beide Aussagen in (1) gezeigt. \square

Als Anwendung zeigen wir einen Kompaktheitssatz für Hölderstetige Funktionen. Sei X metrischer Raum. Für $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} = \|u\|_{C^0(X)} + [u]_{\alpha,X} = \sup_{x \in X} |u(x)| + \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

Dabei ist $0 < \alpha \leq 1$. Es gilt der

Satz 2.5 $C^{0,\alpha}(X) = \{u \in C^0(X) : \|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} < \infty\}$ ist ein Banachraum.

BEWEIS: Sei $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$ eine Cauchyfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(X)}$. Dann ist $u_k \in (C^0 \cap B)(X)$, und u_k ist Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm. Nach Satz 2.3 konvergiert u_k bezüglich der Supremumsnorm gegen ein $u \in (C^0 \cap B)(X)$. Nun gilt für $x, y \in X$ mit $x \neq y$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

Somit ist $u \in C^{0,\alpha}(X)$, und weiter

$$\frac{|(u - u_k)(x) - (u - u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|(u_l - u_k)(x) - (u_l - u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \|u_l - u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)}.$$

Es folgt $[u - u_k]_{\alpha,X} < \varepsilon$ für $k \geq k(\varepsilon)$, das heißt die Folge konvergiert gegen u in der $C^{0,\alpha}$ -Norm. \square

Satz 2.6 (Einbettung von Hölderräumen) Sei X kompakter metrischer Raum, und $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, eine Folge mit $\|u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)} \leq \Lambda < \infty$ für alle k . Dann gibt es ein $u \in C^{0,\alpha}(X)$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:

$$u_k \rightarrow u \text{ in } C^{0,\beta}(X) \quad \text{für jedes } 0 \leq \beta < \alpha.$$

BEWEIS: Nach (2.5) gilt für die Oszillation die Abschätzung

$$\omega_{u_k}(\delta) \leq [u_k]_{\alpha, X} \delta^\alpha \leq \Lambda \delta^\alpha.$$

Damit ist die Folge u_k gleichgradig stetig. Außerdem ist die reelle Folge $u_k(x)$ beschränkt für jedes x , also relativ kompakt in \mathbb{R} . Nach Arzelà-Ascoli gibt es ein $u \in C^0(X)$, so dass $u_k \rightarrow u$ in $C^0(X)$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Es gilt $u \in C^{0, \alpha}(X)$, denn

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|}{d(x, y)^\alpha} \leq \Lambda < \infty.$$

Für $d(x, y) \leq \delta$ gilt die Abschätzung

$$\frac{|(u - u_k)(x) - (u - u_k)(y)|}{d(x, y)^\beta} = d(x, y)^{\alpha - \beta} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|(u_l - u_k)(x) - (u_l - u_k)(y)|}{d(x, y)^\alpha} \leq 2\Lambda \delta^{\alpha - \beta}.$$

Andererseits gilt für $d(x, y) \geq \delta$

$$\frac{|(u - u_k)(x) - (u - u_k)(y)|}{d(x, y)^\beta} \leq 2\delta^{-\beta} \|u - u_k\|_{C^0(X)}.$$

Also folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [u - u_k]_{\beta, X} \leq 2\Lambda \delta^{\alpha - \beta} \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \rightarrow 0,$$

das heißt $u_k \rightarrow u$ in $C^{0, \beta}(X)$ wie behauptet. \square

Hölderstetige Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei der Analysis von elliptischen Differentialgleichungen. Im Folgenden skizzieren wir das am Beispiel eines Randwertproblems. Wir brauchen dafür eine Verallgemeinerung von Satz 2.6 auf die Situation, wenn Ableitungen Hölderstetig sind. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Für $u \in C^k(\Omega)$ setzen wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^k(\Omega)} &= \sum_{0 \leq |\gamma| \leq k} \|D^\gamma u\|_{C^0(\Omega)}, \\ \|u\|_{C^{k, \alpha}(\Omega)} &= \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma u]_{\alpha, \Omega}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ die Ableitungsordnung von $D^\gamma = \partial_1^{\gamma_1} \dots \partial_n^{\gamma_n}$. Wir definieren die Funktionenräume

$$\begin{aligned} C^k(\bar{\Omega}) &= \{u \in C^k(\Omega) : D^\gamma u \text{ ist auf } \bar{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar für alle } |\gamma| \leq k\}, \\ C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) &= \{u \in C^k(\Omega) : \|u\|_{C^{k, \alpha}(\Omega)} < \infty\}. \end{aligned}$$

Satz 2.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt:*

- (1) $(C^k(\bar{\Omega}), \|u\|_{C^k(\Omega)})$ ist ein Banachraum.
- (2) $(C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}), \|u\|_{C^{k, \alpha}(\Omega)})$ ist ein Banachraum.

BEWEIS: (1) gilt für $k = 0$ nach Satz 2.3(2). Betrachte für $k = 1$ eine Cauchyfolge $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|u\|_{C^1(\Omega)}$. Dann gilt $u_j \rightarrow u \in C^0(\overline{\Omega})$ sowie $\partial_i u_j \rightarrow v_i \in C^0(\overline{\Omega})$ gleichmäßig mit $j \rightarrow \infty$. Für $x_0 \in \Omega$ und $s \in \mathbb{R}$ hinreichend klein gilt

$$u_j(x_0 + se_i) = u_j(x_0) + \int_0^s \partial_i u_j(x_0 + te_i) dt.$$

Mit $j \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$u(x_0 + se_i) = u(x_0) + \int_0^s v_i(x_0 + te_i) dt,$$

also durch Differentiation $\partial_i u(x_0) = v_i(x_0)$. Somit ist $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\|u - u_j\|_{C^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Im Fall $k \geq 2$ konvergiert eine Cauchyfolge u_j bezüglich $\|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ gegen $u \in C^1(\overline{\Omega})$, und nach Induktion konvergiert $\partial_i u_j$ gegen $v_i \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k-1}(\Omega)}$. Es folgt $v_i = \partial_i u$ und hieraus Behauptung (1).

Sei jetzt $u_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$. Dann gilt zunächst $u_j \rightarrow u$ in $C^k(\overline{\Omega})$ wie gerade gezeigt. Für $|\gamma| = k$ gilt weiter $D^\gamma u_j \rightarrow v^\gamma$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ nach Satz 2.5. Es folgt $v^\gamma = D^\gamma u$ und $u_j \rightarrow u$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$. \square

Wir brauchen nun folgenden technischen Begriff.

Definition 2.4 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat Sehnenbogenkonstante $\kappa \in [1, \infty)$, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in \Omega$ einen C^1 -Weg γ von x nach y gibt mit $L(\gamma) \leq \kappa|x - y|$.

Satz 2.8 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Sehnenbogenkonstante $\kappa < \infty$, und seien $k, l \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $k + \alpha > l + \beta$. Ist $u_j \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ eine Folge mit $\|u_j\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda < \infty$, so konvergiert eine Teilfolge in $C^{l,\beta}(\overline{\Omega})$.

BEWEIS: Wir gehen in vier Schritten vor.

Schritt 1 Der Fall $k = l = 0$ (also $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$) gilt nach Satz 2.6.

Schritt 2: Es gilt $\|u\|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{C^1(\Omega)}$:

Für $x, y \in \Omega$ sei $\gamma \in C^1([0, 1], \Omega)$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $L(\gamma) \leq \kappa|x - y|$. Es folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq \left| \int_0^1 Du(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \leq \|Du\|_{C^0(\Omega)} \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \leq \kappa \|Du\|_{C^0(\Omega)} |x - y|.$$

Schritt 3: Der Fall $k = l \geq 1$, $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$:

Nach Schritt 2 und Schritt 1 gilt induktiv $u_j \rightarrow u$ in $C^{k-1}(\overline{\Omega})$, Ferner nach Schritt 1 $D^\gamma u_j \rightarrow v^\gamma$ in $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ für $|\gamma| = k$. Wie in Satz 2.7 folgt $v^\gamma = D^\gamma u$ für $|\gamma| = k$, also $u_j \rightarrow u$ in $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$.

Schritt 4: Der Fall $k > l \geq 0$:

Nach Schritt 2 gilt $\|u_j\|_{C^{l+1}(\Omega)} \leq C \|u_j\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda$. Für $\alpha > 0$ haben wir $u_j \rightarrow u$ in $C^k(\overline{\Omega})$ mit Schritt 3, also $u_j \rightarrow u$ in $C^{l,1}(\overline{\Omega})$ nach Schritt 2. Für $\alpha = 0, \beta = 1$ ist $k \geq l + 2$. Es gilt dann mit Schritt 2

$$\|u\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{C^k(\Omega)} \leq C\Lambda.$$

Nach Schritt 3 folgt $u_j \rightarrow u$ in $C^{k-1}(\overline{\Omega})$. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Jetzt kommen wir (endlich) zu der Anwendung. Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^∞ -Gebiet. Betrachte das Randwertproblem

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Im Fall $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = c = 0$ handelt es sich um die klassische Poissongleichung $\Delta u = f$, allgemein sind die Koeffizienten a_{ij} , b_i , c beliebige Funktionen auf Ω . Wir setzen aber voraus, dass für gewisse Konstanten $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ folgende Bedingungen gelten:

$$(2.6) \quad \max_{1 \leq i,j \leq n} \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}, \max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}, \|c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda,$$

$$(2.7) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Die Voraussetzung (2.7) heißt Elliptizitätsbedingung, salopp gesagt bedeutet sie, dass die Gleichung vom Typ der Poissongleichung ist. Um das Problem funktionalanalytisch zu formulieren, betrachten wir den linearen Operator

$$L : C_0^2(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\overline{\Omega}), \quad Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu,$$

wobei $C_0^2(\overline{\Omega}) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Das Randwertproblem hat somit die Kurzfassung

$$Lu = f.$$

Die Regularitätsbedingung (2.6) impliziert, dass L ein beschränkter Operator ist:

$$\|Lu\|_{C^0(\Omega)} \leq \Lambda \left(\sum_{i,j=1}^n \|\partial_{ij}^2 u\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{C^0(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)} \right) = \Lambda \|u\|_{C^2(\Omega)}.$$

Für die Operatornorm gilt also $\|L\| \leq \Lambda$. Wir verwenden ohne Beweis die folgenden a priori Abschätzungen von Schauder⁶. Sie sind ein fundamentales Resultat aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen, siehe [2, Theorem 6.19].

Satz 2.9 (Regularitätssatz von Schauder) *Seien Ω und L wie oben, und $u \in C_0^2(\overline{\Omega})$ sei Lösung von $Lu = f$. Ist $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, so ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ und es gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}),$$

wobei C nur von den Daten $n, \alpha, \lambda, \Lambda$ und Ω abhängt.

⁶J. Schauder, 1899-1943

Die Aussage des Satzes ist grob gesprochen, dass die Lösung u maximal regulär ist, das heißt u ist so gut wie es die Daten Ω , a_{ij} , b_i , c , f erlauben. Im Fall von C^∞ -Daten wäre die Lösung beispielsweise ebenfalls von der Klasse C^∞ . Ein anderes, wohlbekanntes Beispiel für eine elliptische Differentialgleichung ist die Cauchy-Riemann Gleichung aus der Funktionentheorie, und man hat dort eine analoge Verbesserung der Regularität: differenzierbare Lösungen sind automatisch unendlich oft differenzierbar. Auch in der Funktionentheorie ist es wichtig, dass nicht nur die Regularität verbessert wird, sondern durch Abschätzungen quantitativ kontrolliert werden kann. Wir interessieren uns nun für die Lösungen des homogenen Problems, also zur rechten Seite $f \equiv 0$.

Folgerung 2.1 *Der Kern von $L : C_0^2(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\overline{\Omega})$ ist endlichdimensional.*

BEWEIS: Wähle auf $\ker L$ die Norm $\|u\|_{C^0(\Omega)}$. Sei $u_k \in \ker L$ eine beliebige Folge mit $\|u_k\|_{C^0(\Omega)} \leq 1$ für alle k . Aus Satz 2.9 (mit $f \equiv 0$) folgt, dass die Folge u_k in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ beschränkt ist. Nach Satz 2.8 gilt für eine Teilfolge

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } C^2(\overline{\Omega}), \text{ insbesondere } u \in \ker L.$$

Die Einheitskugel in $\ker L$ ist somit bezüglich der C^0 -Norm kompakt, das heißt $\ker L$ ist endlichdimensional nach dem Satz von Heine-Borel, Satz 2.2. \square

3 Existenz linearer Funktionale

In einem endlichdimensionalen, normierten Vektorraum X kann man Funktionale $\varphi \in X'$ durch ihre Werte auf einer Basis e_1, \dots, e_n definieren. Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ist die gegebene Norm $\|x\|$ äquivalent zu $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ nach Satz 0.1, damit ist φ automatisch stetig:

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\varphi(e_i)| |x_i| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\varphi(e_i)| \right) \sum_{i=1}^n |x_i| \leq C \|x\|.$$

Für $\dim X = \infty$ könnten Linearformen zwar ebenfalls über eine Basis definiert werden, aber die Stetigkeit bzw. Beschränktheit wäre unklar. Der folgende Satz erlaubt induktiv die Konstruktion von linearen Funktionalen, bei Beibehaltung der Norm. Statt einer Norm wird etwas allgemeiner eine Abschätzung durch eine sublineare Funktion betrachtet.

Satz 3.1 (Hahn-Banach) ⁷ *Sei X ein \mathbb{R} -Vektorraum und $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, das heißt*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) \quad \text{für alle } \lambda \geq 0, x \in X, \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y) \quad \text{für alle } x, y \in X. \end{aligned}$$

Sei $V \subset X$ ein Unterraum und $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit

$$\varphi(v) \leq p(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Dann gibt es eine Linearform $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi|_V = \varphi$ und $\phi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

⁷H. Hahn, 1879-1934

BEWEIS:

Schritt 1: Für $x \notin V$ konstruieren wir eine Fortsetzung $\phi : V \oplus \mathbb{R}x \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi \leq p$.

Definiere $\phi(v + \alpha x) = \varphi(v) + \alpha s$, wobei $s = \phi(x)$ noch zu bestimmen ist. Damit ist ϕ wohldefiniert, linear, und es gilt $\phi|_V = \varphi$. Wir brauchen

$$(3.8) \quad p(v + \alpha x) \geq \varphi(v) + \alpha s \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}, v \in V.$$

Nach Voraussetzung gilt das für $\alpha = 0$. Es reicht dann $\alpha = \pm 1$, denn für $\alpha > 0$ folgt

$$p(v \pm \alpha x) = \alpha p\left(\frac{v}{\alpha} \pm x\right) \geq \alpha\left(\varphi\left(\frac{v}{\alpha}\right) \pm s\right) = \varphi(v) \pm \alpha s.$$

Wir können also $s \in \mathbb{R}$ mit (3.8) wählen, falls

$$\inf_{v \in V} (p(v + x) - \varphi(v)) \geq \sup_{v' \in V} (\varphi(v') - p(v' - x)).$$

Aber nach Voraussetzung gilt

$$p(v + x) + p(v' - x) \geq p(v + v') \geq \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v').$$

Damit ist Schritt 1 gezeigt.

Schritt 2: X hat eine abzählbare Basis $\{x_1, x_2, \dots\}$

Definiere induktiv $i_1 < i_2 < \dots$ kleinstmöglich mit $x_{i_k} \notin V \oplus \text{span}\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}\}$. Es folgt $X = V \oplus \text{span}\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots\}$. Mit Schritt 1 erhalten wir die verlangte Fortsetzung induktiv auf ganz X .

Schritt 3: Konstruktion für X beliebig

Wir führen die Behauptung auf das Lemma von Zorn zurück⁸. Dieses ist kein Lemma, sondern in unserem Rahmen ein Axiom, das gleichwertig mit dem Auswahlaxiom oder dem Wohlordnungsprinzip ist. Es stellt eine Art verallgemeinerte Induktion dar.

Definition 3.1 (induktive Ordnung) Eine Menge A mit einer Relation \leq heißt teilweise geordnet, wenn für alle $a, b, c \in A$ Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} a &\leq a \\ a \leq b, b \leq a &\Rightarrow a = b, \\ a \leq b, b \leq c &\Rightarrow a \leq c. \end{aligned}$$

(1) $M \subset A$ heißt total geordnet \Leftrightarrow für $a, b \in M$ gilt stets $a \leq b$ oder $b \leq a$.

(2) $m \in A$ heißt maximales Element \Leftrightarrow aus $m \leq a \in A$ folgt $a = m$.

(3) $b \in A$ heißt obere Schranke von $M \Leftrightarrow a \leq b$ für alle $a \in M$.

(4) A heißt induktiv geordnet \Leftrightarrow jede total geordnete Menge $M \subset A$ hat eine obere Schranke.

⁸M. Zorn, 1906-1993

Zum Beispiel kann man auf einem Baum die Relation $a \leq b$ betrachten, bei der b ein Wachstums-Nachfolger von a ist. Dann sind nicht alle Punkte des Baums vergleichbar, eine gewachsene Folge von Ästen ist aber total geordnet. Jede Zweigspitze ist ein maximales Element.

Lemma von Zorn *Ist (A, \leq) induktiv geordnet, so hat A (mindestens) ein maximales Element.*

Wir zeigen jetzt Satz 3.1 mit dem Lemma von Zorn. Sei A die Menge aller Paare (W, ψ) , wobei $W \supset V$ Unterraum, $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\psi|_V = \varphi$ und $\psi(w) \leq p(w)$ für alle $w \in W$. Definiere die teilweise Ordnung

$$(W_1, \psi_1) \leq (W_2, \psi_2) \Leftrightarrow W_1 \subset W_2, \psi_2|_{W_1} = \psi_1.$$

Die Regeln der teilweisen Ordnung sind leicht zu prüfen. Wir zeigen nun, dass A induktiv geordnet ist. Sei dazu $M = (W_i, \psi_i)_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge von A . Setze

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i \quad \text{und} \quad \psi : W \rightarrow \mathbb{R}, \psi|_{W_i} = \psi_i.$$

Für $i, j \in I$ gilt $W_i \subset W_j$ und $\psi_j|_{W_i} = \psi_i$, oder umgekehrt. Damit sieht man:

- W ist linearer Unterraum,
- ψ ist wohldefiniert, linear und $\psi|_V = \varphi$,
- $\psi(w) \leq p(w)$ für alle $w \in W$.

Somit ist (W, ψ) eine obere Schranke von M , also A induktiv geordnet. Sei nun nach Zorn (W, ϕ) maximales Element von A . Wäre W ein echter Unterraum von X , so könnten wir mit Schritt 1 eine Fortsetzung von (W, ϕ) bestimmen, im Widerspruch zur Maximalität. Die gewünschte Fortsetzung (X, ϕ) ist also gefunden, der Satz von Hahn-Banach bewiesen. \square

Satz 3.2 (Hahn-Banach für lineare Funktionale) *Sei X normierter \mathbb{K} -Vektorraum, $V \subset X$ Unterraum mit der induzierten Norm. Dann gibt es zu $\varphi \in V'$ ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi = \varphi \text{ auf } V \quad \text{und} \quad \|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}.$$

BEWEIS: Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wähle $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \|\varphi\|_{V'} \|x\|$. Dann ist p sublinear, und

$$|\varphi(v)| \leq \|\varphi\|_{V'} \|v\| = p(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Die Fortsetzung $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ nach Satz 3.1 erfüllt $\phi(x) \leq p(x) = \|\varphi\|_{V'} \|x\|$, also gilt $\|\phi\|_{X'} = \|\varphi\|_{V'}$ wie verlangt.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachte $\varphi_1 = \operatorname{Re} \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$, also $|\varphi_1(v)| \leq |\varphi(v)| \leq \|\varphi\|_{V'} \|v\|$ für alle $v \in V$. Wähle ein \mathbb{R} -lineares Funktional $\phi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi_1 = \varphi_1 \text{ auf } V \quad \text{und} \quad \|\phi_1\|_{X'} = \|\varphi_1\|_{V'}.$$

Definiere $\phi(x) = \phi_1(x) - i\phi_1(ix)$. Dann ist ϕ linear über \mathbb{C} , denn

$$\phi(ix) = \phi_1(ix) - i\phi_1(-x) = i(\phi_1(x) - i\phi_1(ix)) = i\phi(x).$$

Weiter folgt für alle $v \in V$

$$\phi(v) = \varphi_1(v) - i\varphi_1(iv) = \operatorname{Re} \varphi(v) - i \operatorname{Re} \varphi(iv) = \operatorname{Re} \varphi(v) + i \operatorname{Im} \varphi(v) = \varphi(v).$$

Schließlich gilt mit geeignetem $\theta \in [0, 2\pi)$

$$|\phi(x)| = e^{i\theta} \phi(x) = \underbrace{\phi(e^{i\theta} x)}_{\in \mathbb{R}} = \phi_1(e^{i\theta} x) \leq \|\varphi_1\|_{V'} \|e^{i\theta} x\| \leq \|\varphi\|_{V'} \|x\|.$$

□

Der Satz von Hahn-Banach ist ein grundlegendes Resultat der Funktionalanalysis. Es ist etwas unbefriedigend, dass es auf das nichtkonstruktive Lemma von Zorn zurückgreifen muss. In vielen Fällen ist das tatsächlich unnötig, was wir kurz erläutern wollen. Ein metrischer Raum (und allgemeiner ein topologischer Raum) heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Für einen normierten Raum X ist das gleichbedeutend damit, dass eine linear unabhängige Menge $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ existiert mit

$$X = \overline{\operatorname{Span}(B)}.$$

Eine solche Menge B wird manchmal eine Basis von X genannt (zur Unterscheidung bezeichnet man eine Basis im Sinne der Linearen Algebra als *Hamel-Basis*⁹; in der Funktional-Analysis spielen Hamel-Basen in aller Regel keine Rolle). Die Äquivalenz ergibt sich wie folgt: hat man eine abzählbare dichte Teilmenge, so kann man wie in Satz 3.1 induktiv Elemente weglassen und gelangt zu einer Basis B . Hat man umgekehrt eine abzählbare Basis B , so sind die Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten abzählbar und dicht in X .

Sei nun X separabel und $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine Basis von X . Ein gegebenes Funktional $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ können wir mit Induktion nach Satz 3.1, Schritt 2, fortsetzen zu

$$\phi : V \oplus \operatorname{Span} B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi|_V = \varphi, \quad \text{wobei } \|\phi\| \leq \|\varphi\|.$$

Da ϕ Lipschitzstetig ist, existiert dann eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\phi : X = \overline{V \oplus \operatorname{Span} B} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } \|\phi\| \leq \|\varphi\|.$$

Wir können also hier auf das Lemma von Zorn verzichten und stattdessen die Fortsetzung per Stetigkeit verwenden. Ein konkretes Beispiel sind die Räume $L^p(\Omega)$, die für $1 \leq p < \infty$ separabel sind. Wir kommen nun zu Anwendungen. Im Folgenden sind die Normen von linearen Funktionalen auf den jeweiligen Definitionsbereichen zu nehmen.

Folgerung 3.1 *Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Ist $V \subset X$ ein Unterraum und $x_0 \in X$ mit $\operatorname{dist}(x_0, V) > 0$ ¹⁰, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit*

$$\phi|_V = 0, \quad \|\phi\| = 1 \quad \text{und} \quad \phi(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, V).$$

BEWEIS: Definiere das lineare Funktional $\varphi \in (V \oplus \mathbb{R}x_0)'$ durch $\varphi(v + \alpha x_0) = \alpha \operatorname{dist}(x_0, V)$. Es gilt $\varphi|_V = 0$ und für $\alpha \neq 0$, $v \in V$

$$\|v + \alpha x_0\| = |\alpha| \left\| \frac{v}{\alpha} + x_0 \right\| \geq |\alpha| \operatorname{dist}(x_0, V) = |\varphi(v + \alpha x_0)|.$$

⁹G. Hamel, 1877-1954

¹⁰e.g. V abgeschlossen und $x_0 \notin V$

Also gilt $\|\varphi\| \leq 1$. Wegen $\text{dist}(x_0, V) > 0$ gibt es andererseits ein $v_\varepsilon \in V$ mit $\|v_\varepsilon - x_0\| < (1 + \varepsilon) \text{dist}(x_0, V)$, also folgt

$$|\varphi(v_\varepsilon - x_0)| = \text{dist}(x_0, V) > \frac{1}{1 + \varepsilon} \|v_\varepsilon - x_0\|.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $\|\varphi\| \geq 1$. Setze nun φ mit gleicher Norm fort nach Satz 3.2. \square

Folgerung 3.2 *In einem normierten Vektorraum X gelten folgende Aussagen:*

- (1) *Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(x_0) = \|x_0\|$.*
- (2) *Aus $\phi(x) = 0$ für alle $\phi \in X'$ folgt $x = 0$.*

BEWEIS: (1) ist der Spezialfall $V = \{0\}$ in Folgerung 3.1, es ist dann $\text{dist}(x_0, V) = \|x_0\|$. Behauptung (2) folgt unmittelbar. \square

Wir kommen nun zu Anwendungen des Satzes von Hahn-Banach auf die Trennung von konvexen Mengen. Dazu folgendes Lemma.

Lemma 3.1 *Sei X normierter Raum. Ist $K \subset X$ offen konvex mit $0 \in K$, so ist*

$$p : X \rightarrow [0, \infty), \quad p(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in K\},$$

sublinear und es gilt $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

BEWEIS: Es gilt $p(0) = 0$ und $p(x) < \infty$ für alle $x \in X$, da K eine Kugel um den Nullpunkt enthält. Wir behaupten für $x \in X$, $t > 0$ beliebig

$$(3.9) \quad \frac{x}{t} \in K \quad \Leftrightarrow \quad p(x) < t.$$

Sei $\frac{x}{t} \in K$. Da K offen, gilt $\frac{x}{s} \in K$ für $s < t$ nahe bei t , also $p(x) \leq s < t$. Ist umgekehrt $p(x) < t$, so wähle $s \in (p(x), t)$ mit $\frac{x}{s} \in K$. Da K sternförmig bezüglich des Nullpunkts, folgt

$$\frac{x}{t} = \frac{s}{t} \cdot \frac{x}{s} \in K.$$

Also ist (3.9) gezeigt, insbesondere $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Für $\lambda > 0$ gilt mit $s = \frac{t}{\lambda}$

$$p(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \frac{\lambda x}{t} \in K\} = \lambda \inf\{s > 0 : \frac{x}{s} \in K\} = \lambda p(x).$$

Es bleibt die Subadditivität. Für $x, y \in X$ wähle $\lambda > p(x)$, $\mu > p(y)$. Dann gilt

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{\in K} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \underbrace{\frac{y}{\mu}}_{\in K} \in K,$$

und es folgt

$$1 > p\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{y}{\mu}\right) = p\left(\frac{x + y}{\lambda + \mu}\right) = \frac{p(x + y)}{\lambda + \mu}.$$

Mit $\lambda \searrow p(x)$, $\mu \searrow p(y)$ folgt $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. \square

Bemerkung. Ist K beschränkt, so gilt $p(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Ist außerdem K symmetrisch bezüglich des Nullpunkts, so ist $p(x)$ eine Norm auf X , die zu der gegebenen Norm äquivalent ist.

Das folgende Lemma ist eine Vorstufe zur Trennung von zwei konvexen Mengen.

Lemma 3.2 Sei $K \subset (X, \|\cdot\|)$ offen und konvex. Zu jedem $x_0 \notin K$ gibt es ein $\phi \in X'$ mit

$$\phi(x) < \phi(x_0) \quad \text{für alle } x \in K.$$

BEWEIS: Durch Translation können wir $0 \in K$ annehmen. Sei $p : X \rightarrow [0, \infty)$ wie in Lemma 3.1. Setze $\varphi(tx_0) = t$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} x = tx_0 \text{ mit } t > 0 &\Rightarrow \frac{x}{t} = x_0 \notin K, \text{ also } p(x) \geq t = \varphi(x), \\ x = tx_0 \text{ mit } t \leq 0 &\Rightarrow \varphi(x) = t \leq 0 \leq p(x). \end{aligned}$$

Nach Satz 3.1 gibt es eine lineare Fortsetzung $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ von φ mit $\phi \leq p$. Für $x \in K$ gilt $\phi(x) \leq p(x) < 1$, aber $\phi(x_0) = \varphi(x_0) = 1$. Es bleibt die Stetigkeit von ϕ zu zeigen. Wähle dazu $B_\varrho(0) \subset K$ und schätze ab

$$\phi(x) \leq p(x) = \frac{\|x\|}{\varrho} p\left(\varrho \frac{x}{\|x\|}\right) \leq \frac{1}{\varrho} \|x\|.$$

□

Satz 3.3 (Hahn-Banach für konvexe Mengen) Sei X normierter Raum und $A, B \subset X$ seien konvex mit $A \cap B = \emptyset$. Ist zusätzlich A offen, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit

$$\phi(x) < \phi(y) \quad \text{für alle } x \in A, y \in B.$$

BEWEIS: Betrachte die Menge

$$K = \{x - y : x \in A, y \in B\} = \bigcup_{y \in B} \{x - y : x \in A\}.$$

Da K Vereinigung von offenen Mengen, ist K offen und konvex wegen

$$\lambda(x_1 - y_1) + \mu(x_2 - y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) \in K.$$

Ferner gilt $0 \notin K$ wegen $A \cap B = \emptyset$. Nach Lemma 3.2 gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\phi(z) < \phi(0) = 0$ für alle $z \in K$, also $\phi(x) < \phi(y)$ für alle $x \in A, y \in B$. □

Die Aussage des Satzes bedeutet, dass A und B durch eine affine Hyperebene getrennt werden. Genauer sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x \in A} \phi(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} \phi(y).$$

A liegt dann im offenen Halbraum $\{\phi < \alpha\}$, und B im abgeschlossenen Halbraum $\{\phi \geq \alpha\}$. Wir brauchen später folgende Variante von Satz 3.3.

Folgerung 3.3 Sei X normierter Raum und $A, B \subset X$ seien konvex mit $A \cap B = \emptyset$. Ist zusätzlich A abgeschlossen und B kompakt, so können A, B strikt getrennt werden, das heißt

$$\sup_{x \in A} \phi(x) < \inf_{y \in B} \phi(y).$$

BEWEIS: Betrachte für $\varrho > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} A_\varrho &= A + B_\varrho(0) = \{x + z : x \in A, z \in B_\varrho(0)\}, \\ B_\varrho &= B + B_\varrho(0) = \{y + z : y \in B, z \in B_\varrho(0)\}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass A_ϱ, B_ϱ offen und konvex sind. Da A abgeschlossen und B kompakt, ist $A_\varrho \cap B_\varrho = \emptyset$ für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Nach Satz 3.3 werden A_ϱ, B_ϱ durch ein $\phi \in X'$ getrennt. Für alle $x \in A, y \in B$ und $z, z' \in B_\varrho(0)$ folgt

$$\phi(x) + \varrho\phi(z) = \phi(x + \varrho z) \leq \phi(y + \varrho z') \leq \phi(y) + \varrho\phi(z').$$

Bilde links das Supremum über $z \in B_\varrho(0)$, rechts das Infimum über $z' \in B_\varrho(0)$:

$$\phi(x) + \varrho\|\phi\| \leq \phi(y) - \varrho\|\phi\|.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir das Supremum bzw. Infimum bzgl. $x \in A, y \in B$ nehmen. \square

Eine weitere Anwendung ist eine Verschärfung von Lemma 3.2.

Folgerung 3.4 Sei X normierter Raum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Ist $0 \notin K$, so gibt es ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\| = 1$ und

$$\phi(x) \leq -\text{dist}(0, K) \quad \text{für alle } x \in K.$$

BEWEIS: Setze $R = \text{dist}(0, K)$, also $R > 0$ nach Voraussetzung. Nach Satz 3.3 gibt es ein $\phi \in X'$, so dass K und $B_R(0)$ getrennt werden. Nach Normierung gilt $\|\phi\| = 1$. Es folgt

$$\sup_{x \in K} \phi(x) \leq \inf_{y \in B_R(0)} \phi(y) = R \inf_{z \in B_1(0)} \phi(z) = -R\|\phi\| = -R.$$

\square

Die letzte Folgerung dieses Abschnitts bringt das Prinzip zum Ausdruck, dass der Dualraum X' mindestens so groß ist wie der Raum X .

Folgerung 3.5 Sei X normierter Vektorraum. Ist X' separabel, so auch X .

BEWEIS: Wähle eine dichte Folge ϕ_k in der Menge $\{\phi \in X' : \|\phi\| = 1\}$. Eine solche Folge ergibt sich, indem wir eine beliebige dichte Folge in X' normieren. Wähle $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\phi_k(x_k) \geq \frac{1}{2}$. Angenommen es ist

$$V = \overline{\text{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \stackrel{\neq}{\subset} X.$$

Nach Folgerung 3.1 gibt es dann ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_V = 0$ und $\|\phi\| = 1$. Nach Auswahl einer Teilfolge gilt $\phi_k \rightarrow \phi$ in X' . Es folgt

$$0 = \phi(x_k) = \phi_k(x_k) + (\phi - \phi_k)(x_k) \geq \frac{1}{2} - \|\phi - \phi_k\| > 0 \quad \text{für } k \text{ groß,}$$

ein Widerspruch. \square

Beispiel 3.1 Beliebige disjunkte konvexe Mengen A, B können im allgemeinen nicht getrennt werden, das heißt die Voraussetzung A *offen* in Satz 3.3 kann nicht weggelassen werden. Sei A dichter Unterraum eines Banachraums X , und $B = \{x_0\}$ mit $x_0 \notin A$. Angenommen es gibt $\phi \in X'$ mit $\phi(x) < \phi(x_0)$ für alle $x \in A$. Da A dicht, folgt $\phi(x) \leq \phi(x_0)$ für alle $x \in X$ und hieraus $\phi = 0$, ein Widerspruch. Ein konkreter Fall wäre $A = C_c^0(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zum Ende des Abschnitts wollen wir unser Studium von elliptischen Operatoren fortsetzen. Dazu brauchen wir noch eine Eigenschaft der Hölderräume.

Lemma 3.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt mit einer Sehnenbogenbedingung*. Für $u, v \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ist auch $uv \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ und es gilt

$$\|uv\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \quad \text{mit } C = C(k, \Omega).$$

BEWEIS: Durch Induktion über k . Für $k = 0$ schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \frac{|(uv)(x) - (uv)(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|(u(x) - u(y))v(x) + u(y)(v(x) - v(y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq [u]_{\alpha,\Omega}\|v\|_{C^0(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\Omega)}[v]_{\alpha,\Omega} \\ &\leq 2\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sei jetzt die Aussage für $l \leq k - 1$ gezeigt. Dann gilt für $|\gamma| \leq k - 1$

$$\begin{aligned} \|\partial_i D^\gamma(uv)\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} &= \|D^\gamma((\partial_i u)v + u(\partial_i v))\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \\ &\leq C(k - 1, \Omega) \left(\|\partial_i u\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)}\|\partial_i v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} \right) \\ &\leq C(k, \Omega)\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Konstante hängt von der Sehnenbogenkonstante und vom Durchmesser von Ω ab. \square

Wir betrachten den Operator L nun auf den Hölderräumen, also

$$(3.10) \quad L : C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu.$$

Wie in (2.6) und (2.7) sollen die Koeffizienten eine $C^{0,\alpha}$ -Schranke $\Lambda < \infty$ haben und die Elliptizitätsbedingung mit $\lambda > 0$ erfüllen. Aus Lemma 3.3 folgt dann eine Abschätzung

$$\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C\Lambda\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)},$$

das heißt L ist stetiger linearer Operator. Der Grund für den Übergang zu den Hölderräumen ist die a priori Abschätzung von Schauder, Satz 2.9. In $C_0^2(\bar{\Omega})$ gilt eine analoge a priori Abschätzung nicht, und auch das folgende Resultat wäre falsch (wie man zeigen kann).

Satz 3.4 Das Bild des Operators L aus (3.10) ist abgeschlossen in $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

BEWEIS: Nach Folgerung 2.1 in Abschnitt 2 ist $\ker L$ endlichdimensional. Mit Hahn-Banach gibt es dann einen abgeschlossenen Unterraum $X \subset C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ mit

$$C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) = \ker L \oplus X \quad (\text{als Banachräume}),$$

siehe Aufgabe 3, Serie 5. Wir behaupten, dass eine Konstante $\mu > 0$ existiert mit

$$(3.11) \quad \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \geq \mu \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in X.$$

Andernfalls gibt es $u_k \in X$ mit

$$\|Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \frac{1}{k} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Durch Normierung können wir $\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = 1$ annehmen, und haben nach Übergang zu einer Teilfolge $u_k \rightarrow u$ in $C^0(\bar{\Omega})$ nach Satz 2.8. Mit Satz 2.9 folgt

$$\|u_k - u_l\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\|Lu_k - Lu_l\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u_k - u_l\|_{C^0(\Omega)}) < \varepsilon \quad \text{für } k, l \text{ groß.}$$

Nach Satz 2.7 gilt $u_k \rightarrow u$ in $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Nun gilt

$$\|Lu - Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \|u - u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Wegen $\|Lu_k\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \frac{1}{k} \rightarrow 0$ folgt $Lu = 0$, also $u \in \ker L$. Da X abgeschlossen, gilt aber $u \in X$ und somit $u = 0$, im Widerspruch zu $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} = 1$. Damit ist (3.11) bewiesen. Sei nun $f_k \in \text{Bild } L$ mit $f_k \rightarrow f$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Es gibt dann $u_k \in X$ mit $Lu_k = f_k$, und mit (3.11) folgt

$$\|u_k - u_l\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu} \|f_k - f_l\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{mit } k, l \rightarrow \infty.$$

Nach Satz 2.7 folgt $u_k \rightarrow u$ in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Durch Grenzübergang ergibt sich $Lu = f$, also ist das Bild von L abgeschlossen. \square

4 Das Kategorieprinzip von Baire

Definition 4.1 Eine Teilmenge S eines metrischen Raums (X, d) heißt von zweiter Kategorie, falls S keine abzählbare Vereinigung von Mengen ist, die nirgends dicht sind. Dabei heißt A nirgends dicht genau wenn $\text{int } \bar{A} = \emptyset$.

Satz 4.1 (Kategorieprinzip von Baire)¹¹ In einem vollständigen metrischen Raum X gilt für abgeschlossene Mengen A_k , $k \in \mathbb{N}$, die Implikation

$$\text{int } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{int } A_k \neq \emptyset \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Offene Mengen in X sind also von zweiter Kategorie.

BEWEIS: Angenommen es ist $\text{int } A_k = \emptyset$ für alle k , aber $\text{int } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ enthält eine offene Kugel B_0 . Wir bestimmen für $k \geq 1$ induktiv Kugeln $B_k = B_{r_k}(x_k)$ mit $0 < r_k \leq \frac{1}{k}$, so dass

$$\bar{B}_k \subset B_{k-1} \setminus A_k.$$

Dies ist möglich, da $B_{k-1} \setminus A_k$ offen und nichtleer ist. Nach Konstruktion gilt $d(x_k, x_l) \leq \frac{1}{k}$ für $l \geq k$, also ist x_k eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $x \in X$. Es folgt $x \in \bar{B}_k$ für alle $k \geq 1$, also $x \notin A_k$ für alle k . Aber $x \in \bar{B}_1 \subset B_0$, ein Widerspruch. \square

¹¹R.L. Baire, 1874-1932

Lemma 4.1 Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, Y normiert und $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ punktweise gleichmäßig beschränkt:

$$S(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(x)\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann gibt es eine (nichtleere) offene Kugel $B \subset X$ mit

$$\sup_{x \in B} S(x) < \infty.$$

BEWEIS: Die Mengen $A_k = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X : \|f(x)\| \leq k\}$ sind abgeschlossen. Es gilt $x \in A_k$ genau wenn $S(x) \leq k$, also $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Nach Satz 4.1 enthält ein A_k eine offene Kugel B , also gilt $S(x) \leq k$ für alle $x \in B$. \square

Satz 4.2 (Banach-Steinhaus) ¹² Sei X ein Banachraum, Y normierter Raum und $\mathcal{F} \subset L(X, Y)$ sei punktweise gleichmäßig beschränkt:

$$K(x) = \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist \mathcal{F} gleichmäßig beschränkt, also $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$.

BEWEIS: Nach Lemma 4.1 gibt es ein $x_0 \in X$, $\varrho > 0$ und $C < \infty$ mit $\|Tx\| \leq C$ für $\|x - x_0\| \leq \varrho$. Für $x \in X$ beliebig folgt

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\varrho} \left\| T\left(x_0 + \varrho \frac{x}{\|x\|}\right) - T(x_0) \right\| \leq \frac{2C}{\varrho} \|x\|.$$

Also gilt $\|T\| \leq \frac{2C}{\varrho}$. \square

Eine sehr wichtige Anwendung ist die

Folgerung 4.1 Sei X ein Banachraum. Die Folge $\phi_k \in X'$ konvergiere schwach gegen $\phi \in X'$, das heißt

$$\phi_k(x) \rightarrow \phi(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist die Folge ϕ_k in X' beschränkt, also $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\phi_k\| < \infty$.

BEWEIS: Schwache Konvergenz der ϕ_k bedeutet punktweise Konvergenz. Also ist für jedes $x \in X$ die Folge $\phi_k(x)$ beschränkt, und nach Satz 4.2 ist dann auch die Folge $\|\phi_k\|$ beschränkt. \square

Wir werden uns mit der schwachen Konvergenz noch ausführlich beschäftigen. Eine zweite Anwendung ist

Beispiel 4.1 Sei $B : Y \times Y \rightarrow Z$ eine bilineare Abbildung zwischen Banachräumen. Ist B in jedem Argument stetig, so ist B insgesamt stetig.

Satz 4.3 (von der offenen Abbildung) Seien X, Y Banachräume. Ist $T \in L(X, Y)$ surjektiv, so ist T offen, das heißt

$$\Omega \subset X \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad T(\Omega) \subset Y \text{ offen.}$$

¹²Englisch: uniform boundedness principle

Bemerkung. Ist umgekehrt T offen, so folgt $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$ bzw. $B_R(0) \subset T(B_{\frac{R}{\delta}}(0))$, das heißt T ist surjektiv.

BEWEIS: Schritt 1 $\overline{T(B_1(0))} \supset B_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$.

Nach Voraussetzung gilt

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(B_k(0)).$$

Nach Baire, Satz 4.1, gibt es dann ein $y_0 \in Y$, $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\overline{T(B_k(0))} \supset B_\varepsilon(y_0)$. Also gibt es zu jedem $\eta \in B_\varepsilon(0) \subset Y$ eine Folge $x_j \in B_k(0)$ mit $T(x_j) \rightarrow y_0 + \eta$. Wähle noch $\xi_j \in B_k(0)$ mit $T(\xi_j) \rightarrow y_0$. Dann folgt

$$T\left(\underbrace{\frac{x_j - \xi_j}{2k}}_{\in B_1(0)}\right) = \frac{1}{2k}(T(x_j) - T(\xi_j)) \rightarrow \frac{1}{2k}\eta \quad \text{mit } j \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt $\overline{T(B_1(0))} \supset B_{\frac{1}{2k}}(0) =: B_\delta(0)$.

Schritt 2 $B_\delta(0) \subset \overline{T(B_2(0))} \subset T(B_3(0))$.

Es ist nur die erste Inklusion zu zeigen; sei dazu $y_0 \in B_\delta(0)$ gegeben. Setze $x_0 = 0$ und konstruiere x_0, x_1, \dots durch folgende Iteration: ist x_k schon bestimmt mit $\|y_0 - Tx_k\| < 2^{-k}\delta$, so wähle $\xi_k \in B_{2^{-k}}(0)$ mit $\|(y_0 - Tx_k) - T\xi_k\| < 2^{-k-1}\delta$ und setze $x_{k+1} = x_k + \xi_k$. Nach Schritt 1 ist diese Wahl immer möglich. Wegen $\|x_{k+1} - x_k\| < 2^{-k}$ konvergiert die Folge x_k gegen ein $x \in \overline{B_2(0)}$, und es folgt $Tx = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_k = y_0$. Es folgt nun $T(B_r(x_0)) \supset B_{\frac{\delta r}{3}}(T(x_0))$, und die Offenheit von T ist bewiesen. \square

Der nächste Satz garantiert die Stetigkeit der inversen Abbildung. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, insofern liefert der Satz ein gutes Resultat. Am Beispiel des Dirichletproblems sehen wir allerdings, dass die vorausgesetzte Bijektivität schwer zu zeigen ist; es werden dazu a priori Abschätzungen benötigt, aus denen die Stetigkeit der Inversen dann sowieso folgt.

Satz 4.4 (Satz von der inversen Abbildung) Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$ bijektiv. Dann ist T invertierbar, das heißt T^{-1} ist stetig.

BEWEIS: Mit Satz 4.3 gilt $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$ für ein $\delta > 0$, also $T^{-1}(B_\delta(0)) \subset B_1(0)$ oder $T^{-1}(B_1(0)) \subset B_{\frac{1}{\delta}}(0)$, das heißt $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$. \square

Beispiel 4.2 Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ vollständige Normen auf dem Vektorraum X . Dann gilt

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|x\|_2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|x\|_1 < \infty.$$

Betrachte dazu $\text{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ und wende Satz 4.4 an.

Satz 4.5 (vom abgeschlossenen Graphen) Seien X, Y Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ sei linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Der Unterraum $G_T = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \oplus Y$ ist abgeschlossen.
- (2) T ist stetig.

BEWEIS: Ist T stetig und $(x_k, Tx_k) \rightarrow (x, y)$, so folgt $y = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_k = Tx$. Sei umgekehrt G_T abgeschlossen, also Banachraum mit der induzierten Norm auf $X \oplus Y$. Die Projektion $P_X : G_T \rightarrow X$ ist stetig und bijektiv. Nach Satz 4.4 ist dann auch $P_X^{-1} : X \rightarrow G_T$ stetig, und somit auch $T = P_Y P_X^{-1} : X \rightarrow Y$. \square

Satz 4.6 (von der direkten Summe) *Der Banachraum Z sei algebraische direkte Summe der Unterräume X und Y . Sind X, Y abgeschlossene Unterräume, so ist*

$$T : X \oplus Y \rightarrow Z, T(x, y) = x + y,$$

stetig invertierbar, und die Projektionen $P_Y : X \rightarrow Y, P_Z : X \rightarrow Z$ sind stetig.

BEWEIS: X, Y sind Banachräume mit der induzierten Norm, also ist auch $X \oplus Y$ Banachraum. T ist nach Voraussetzung bijektiv und es gilt

$$\|T(x, y)\|_Z = \|x + y\|_Z \leq 2 \max(\|x\|_X, \|y\|_Y) = 2\|(y, z)\|_{X \oplus Z}.$$

Nach Satz 4.4 ist dann auch $T^{-1} : Z \rightarrow X \oplus Y$ stetig. \square

5 Die Dualräume der L^p -Räume

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist die Beschreibung der Dualräume der L^p -Räume. Diese konkrete Fragestellung spielt unter anderem in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine wichtige Rolle. Als erstes rekapitulieren wir einige Begriffe aus der Maßtheorie.

Definition 5.1 (σ -Algebra) *Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset 2^X$ heißt σ -Algebra, wenn gilt:*

- (1) $X \in \mathcal{E}$,
- (2) $E \in \mathcal{E} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{E}$,
- (3) $E_i \in \mathcal{E}$ für $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$.

Eine σ -Algebra ist auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen. Für $E_i \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N}$, gilt nämlich die Darstellung

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X \setminus E_i \right).$$

Außerdem ist mit $E, F \in \mathcal{E}$ auch $E \setminus F = E \cap (X \setminus F) \in \mathcal{E}$.

Definition 5.2 (Maß) *Sei $\mathcal{E} \subset 2^X$ eine σ -Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt Maß auf \mathcal{E} , falls für jede paarweise disjunkte Folge $E_i \in \mathcal{E}$ gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Zur Erinnerung: eine Funktion $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt äußeres Maß, falls

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \Rightarrow \quad \mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad \text{für alle } E, E_i \subset X.$$

Eine Menge $E \subset X$ heißt dann μ -messbar, wenn

$$\mu(S \cap E) + \mu(S \setminus E) \leq \mu(S) \quad \text{für alle } S \subset X.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass das System der μ -messbaren Teilmengen von X eine σ -Algebra ist, und dass die Einschränkung von μ auf die σ -Algebra der μ -messbaren Mengen ein Maß liefert. Das Lebesguemaß einer beliebigen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist zum Beispiel als äußeres Maß gegeben durch

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |Q_i| : Q_i \text{ achsenparalleler Quader, } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\}.$$

Dabei ist $|Q|$ der elementargeometrische Inhalt von Q , also das Produkt der Kantenlängen. Die Einschränkung von \mathcal{L}^n auf das System der \mathcal{L}^n -messbaren Mengen ist dann ein Maß.

Definition 5.3 Sei $\mathcal{E} \subset 2^X$ eine σ -Algebra. $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ heißt \mathcal{E} -messbar, wenn

$$\{x \in X : f(x) < s\} \in \mathcal{E} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Ist ein Maß μ auf einer σ -Algebra \mathcal{E} gegeben, so sagen wir kurz *messbar* statt \mathcal{E} -messbar.

Definition 5.4 (L^p -Raum) Sei μ ein Maß. Für $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar und $p \in [1, \infty]$ setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{s > 0 : |f(x)| \leq s \text{ } \mu\text{-fast-überall}\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^p(\mu)$ die Menge aller messbaren f mit $\|f\|_{L^p(\mu)} < \infty$, und definieren

$$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim \quad \text{wobei } f \sim g \text{ genau wenn } \mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Für $f \in L^p(\mu)$ ist $\|f\|_{L^p(\mu)} \in [0, \infty)$ wohldefiniert und gleich Null genau wenn $f = 0$. Ferner haben wir $\|\lambda f\|_{L^p(\mu)} = |\lambda| \|f\|_{L^p(\mu)}$ für alle $p \in [1, \infty]$. Um zu zeigen, dass $L^p(\mu)$ ein normierter Vektorraum ist, fehlt noch die Dreiecksungleichung.

Satz 5.1 (Höldersche Ungleichung) Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_X fg d\mu \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)} \quad \text{für alle messbaren } f, g \geq 0.$$

Satz 5.2 (Minkowski-Ungleichung) Sei μ ein Maß und $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt

$$\|f + g\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} + \|g\|_{L^p(\mu)} \quad \text{für alle } f, g \in L^p(\mu).$$

Insbesondere ist $L^p(\mu)$ ein normierter Vektorraum.

Satz 5.3 (Fischer-Riesz) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p(\mu)})$ ein Banachraum.

Zusatz. Aus $f_k \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$ folgt $f_k \rightarrow f$ punktweise μ -fast-überall, nach Übergang zu einer geeigneten Teilfolge.

Definition 5.5 (signiertes Maß) Ein signiertes Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$ ist eine Funktion $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow [-\infty, \infty]$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$, so dass für jede paarweise disjunkte Vereinigung $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ gilt:

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i).$$

Diese Definition ist etwas subtil. Es ist Teil der Definition, dass die Reihe für jede disjunkte Vereinigung wohldefiniert ist. Zum Beispiel ist der Fall, dass ein Summand gleich $+\infty$ und ein anderer gleich $-\infty$ ist, a priori ausgeschlossen. Es folgt sogar, dass λ überhaupt höchstens einen der Werte $\pm\infty$ annehmen kann. Denn wäre $\lambda(E^\pm) = \pm\infty$, so hätten wir

$$\lambda(E^+ \cup E^-) = \begin{cases} \lambda(E^+ \setminus E^-) + \lambda(E^-) = -\infty, \\ \lambda(E^- \setminus E^+) + \lambda(E^+) = +\infty. \end{cases}$$

Weiter folgt im Fall $\lambda(E_i) \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dass die Reihe sogar absolut konvergiert bzw. bestimmt divergiert. Denn es gilt zum Beispiel

$$\lambda(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{\lambda(E_i) > 0} \lambda(E_i) < \infty.$$

Andernfalls könnten wir die Reihe so umordnen, dass sie gegen $+\infty$ konvergiert (Übungsaufgabe). Nach Definition 5.5 muss aber auch jede Umordnung der Reihe gegen $\lambda(E)$ gehen, ein Widerspruch. Ist ein Summand $\lambda(E_i) = \pm\infty$, so sind von da ab alle Partialsummen gleich $\pm\infty$, und auch $\lambda(E) = \pm\infty$.

Ist Funktion $\theta : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar und ist wenigstens eines der beiden Integrale von θ^\pm endlich, so ist das Integral von θ mit Wert in $[-\infty, \infty]$ definiert. Wir erhalten dann ein signiertes Maß durch

$$\lambda : \mathcal{E} \rightarrow [-\infty, \infty], \quad \lambda(E) = \int_E \theta \, d\mu = \int_X \theta \chi_E \, d\mu.$$

λ heißt Maß mit Dichte θ bezüglich μ . Um die σ -Additivität zu zeigen, sei $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit E_i messbar, paarweise disjunkt. Aus monotoner Konvergenz folgt

$$\int_X \theta^\pm \chi_E \, d\mu = \int_X \theta^\pm \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \theta^\pm \chi_{E_i} \, d\mu.$$

Da mindestens eines der Integrale $\int \theta^\pm \chi_E \, d\mu$ endlich ist, folgt

$$\lambda(E) = \int_X \theta^+ \chi_E \, d\mu - \int_X \theta^- \chi_E \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X (\theta^+ - \theta^-) \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j).$$

Unser Ziel ist es, jedes signierte Maß als Integral gegen eine solche Dichtefunktion θ darzustellen. Dies besagt der Satz von Radon-Nikodym, auf den wir nach und nach zusteuern.

Definition 5.6 Sei λ ein signiertes Maß auf \mathcal{E} . $P \in \mathcal{E}$ heißt positiv bezüglich λ , falls gilt:

$$\lambda(E) \geq 0 \text{ für alle } E \in \mathcal{E} \text{ mit } E \subset P.$$

Entsprechend sind negativ, Nullmenge bezüglich λ definiert.

Satz 5.4 (Zerlegungssatz von Hahn) Sei λ signiertes Maß auf $\mathcal{E} \subset 2^X$. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $X = P \cup Q$ mit $P, Q \in \mathcal{E}$ positiv bzw. negativ bezüglich λ .

BEWEIS: Alle im Beweis auftretenden Mengen liegen in der σ -Algebra \mathcal{E} , dies wird im Folgenden nicht mehr erwähnt.

Schritt 1 P_j positiv $\Rightarrow P = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ positiv

Sei $E \subset P$. Definiere $E_1 = E \cap P_1$ und induktiv $E_j = (E \cap P_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i$. Die E_i sind paarweise disjunkt mit $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Es folgt

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \geq 0.$$

Schritt 2 Ist $0 < \lambda(E) < \infty$, so gibt es eine positive Menge $P \subset E$ mit $\lambda(P) > 0$.

Wir konstruieren induktiv $E =: E_0 \supset E_1 \supset \dots$ wie folgt: ist E_k gegeben so betrachte

$$\lambda_k = \inf_{F \subset E_k} \lambda(F).$$

Im Fall $\lambda_k \geq 0$ stoppen wir. Andernfalls sei $\mu_k = \max(\lambda_k/2, -1)$, also $\mu_k \in (\lambda_k, 0)$. Wähle $F_k \subset E_k$ mit $\lambda(F_k) \leq \mu_k$, und setze $E_{k+1} = E_k \setminus F_k$. Es gilt $\lambda(F_j) \leq \mu_j < 0$ für $j \leq k-1$, also

$$0 < \lambda(E) = \lambda(E_k) + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda(F_j) \leq \lambda(E_k) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j \leq \lambda(E_k).$$

Im Fall $\lambda_k \geq 0$ gilt Schritt 2 mit $P = E_k$. Sonst wähle $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, es folgt

$$0 < \lambda(E) = \lambda(P) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(F_k) \leq \lambda(P) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \leq \lambda(P).$$

Insbesondere ist $\lambda(P) > 0$. Aus $\lambda(E) < \infty$ folgt mit Definition 5.5 auch $\lambda(P) < \infty$, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \max(\lambda_k/2, -1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k > -\infty.$$

Also ist λ_k eine Nullfolge. Da $P \subset E_k$ für alle k , folgt für alle $F \subset P$

$$\lambda(F) \geq \lambda_k \rightarrow 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty,$$

das heißt P ist positiv wie behauptet.

Schritt 3 Beweis des Satzes

Wir können annehmen, dass λ den Wert ∞ nicht annimmt, sonst betrachte $-\lambda$. Setze

$$\Lambda = \sup\{\lambda(E) : E \text{ positiv bezüglich } \lambda\}.$$

Es gilt $\Lambda \geq 0$ wegen $\lambda(\emptyset) = 0$. Wähle P_k positiv bezüglich λ mit $\lambda(P_k) \rightarrow \Lambda$, und setze $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Nach Schritt 1 ist P positiv, folglich gilt $\lambda(P) \leq \Lambda$. Andererseits ist

$$\lambda(P) = \lambda(P_k) + \lambda(P \setminus P_k) \geq \lambda(P_k),$$

also $\lambda(P) = \Lambda$, insbesondere $\Lambda < \infty$. Wir zeigen, dass $Q = X \setminus P$ negativ ist. Angenommen es gibt $E \subset Q$ mit $\lambda(E) > 0$. Nach Schritt 2 gibt es dann ein $P' \subset E$ positiv mit $\lambda(P') > 0$, und es folgt

$$\Lambda \geq \lambda(P \cup P') = \lambda(P) + \lambda(P') = \Lambda + \lambda(P'),$$

also $\lambda(P') = 0$, Widerspruch. Die gewünschte Zerlegung $X = P \cup Q$ ist gefunden. \square

Definition 5.7 Seien λ, μ Maße auf der σ -Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$.

(1) λ heißt absolutstetig bezüglich μ (Notation: $\lambda \ll \mu$), falls gilt:

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0.$$

(2) λ, μ heißen zueinander singulär (Notation: $\lambda \perp \mu$), falls ein $A \in \mathcal{E}$ existiert mit

$$\lambda(X \setminus A) = \mu(A) = 0.$$

Folgerung 5.1 Sei λ signiertes Maß auf der σ -Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$. Dann gilt eine eindeutige Darstellung $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, wobei λ^\pm zueinander singuläre Maße auf \mathcal{E} sind. Das auf \mathcal{E} definierte Maß $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$ heißt Totalvariation von λ .

BEWEIS: Die Existenz folgt aus Satz 5.4, indem wir setzen

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) \quad \text{und} \quad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap Q).$$

Die Eindeutigkeit soll als Übungsaufgabe gezeigt werden. \square

Lemma 5.1 Sei μ ein Maß auf $\mathcal{E} \subset 2^X$. Gegeben seien $Q_\alpha \in \mathcal{E}$, $\alpha \in \mathbb{Q}_0^+$, mit $Q_0 = \emptyset$ und $\mu(Q_\alpha \setminus Q_\beta) = 0$ für $\alpha < \beta$. Dann gibt es eine messbare Funktion $\theta : X \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\begin{aligned} \theta(x) &\leq \beta && \text{für } \mu\text{-fast-alle } x \in Q_\beta, \\ \theta(x) &\geq \beta && \text{für } \mu\text{-fast-alle } x \notin Q_\beta. \end{aligned}$$

BEWEIS: Setze $\theta(x) = \inf\{\beta \in \mathbb{Q}_0^+ : x \in Q_\beta\}$. Dann gilt

$$\theta(x) < \beta \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{\alpha < \beta} Q_\alpha.$$

Also ist θ messbar. Außerdem folgt

$$\begin{aligned} x \in Q_\beta &\Rightarrow \theta(x) \leq \beta, \\ x \notin Q_\beta, \theta(x) < \beta &\Rightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}_0^+, \alpha < \beta} Q_\alpha \setminus Q_\beta. \end{aligned}$$

Die rechte Menge ist eine Nullmenge. \square

Satz 5.5 (Radon-Nikodym) Seien λ, μ Maße auf der σ -Algebra $\mathcal{E} \subset 2^X$, μ sei σ -endlich.
¹³ Ist λ absolutstetig bezüglich μ , so existiert eine messbare Funktion $\theta : X \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\lambda(E) = \int_E \theta d\mu \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Die Funktion θ ist eindeutig bis auf Abänderung in einer μ -Nullmenge, sie heißt Radon-Nikodym-Dichte von λ bezüglich μ .

BEWEIS: Wir setzen zuerst $\mu(X) < \infty$ voraus.

Eindeutigkeit. Seien $\theta_{1,2}$ zwei solche Funktionen. Angenommen es gibt $\varepsilon > 0$ mit

$$\mu(E_\varepsilon) > 0 \quad \text{für } E_\varepsilon = \{x \in X : \theta_2(x) > \theta_1(x) + \varepsilon\}.$$

Sei $E_{\varepsilon,k} = \{x \in E_\varepsilon : \theta_1(x) \leq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Da $\theta_1 < \infty$ auf E_ε , gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(E_{\varepsilon,k}) > 0$. Es folgt $\lambda(E_{\varepsilon,k}) = \int_{E_{\varepsilon,k}} \theta_1 d\mu \leq k\mu(E_{\varepsilon,k}) < \infty$, und nun

$$\lambda(E_{\varepsilon,k}) = \int_{E_{\varepsilon,k}} \theta_2 d\mu \geq \int_{E_{\varepsilon,k}} \theta_1 d\mu + \varepsilon\mu(E_{\varepsilon,k}) = \lambda(E_{\varepsilon,k}) + \varepsilon\mu(E_{\varepsilon,k}) > \lambda(E_{\varepsilon,k}),$$

Widerspruch. Also ist $\theta_1 = \theta_2$ μ -fast-überall.

Existenz. Wähle für das signierte Maß $\lambda - \alpha\mu$, $\alpha \in \mathbb{Q}_0^+$, eine Hahn-Zerlegung $X = P_\alpha \cup Q_\alpha$, wobei $Q_0 := \emptyset$. Für $\alpha < \beta$ gilt $Q_\alpha \setminus Q_\beta \subset Q_\alpha \cap P_\beta$, also

$$(\lambda - \alpha\mu)(Q_\alpha \setminus Q_\beta) \leq 0 \quad \text{und} \quad (\lambda - \beta\mu)(Q_\alpha \setminus Q_\beta) \geq 0.$$

Insbesondere ist $\lambda(Q_\alpha \setminus Q_\beta) \in \mathbb{R}$, und durch Subtraktion

$$(\beta - \alpha)\mu(Q_\alpha \setminus Q_\beta) \leq 0, \quad \text{also } \mu(Q_\alpha \setminus Q_\beta) = 0.$$

Für $E \in \mathcal{E}$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ setze

$$E_k = (E \cap Q_{\frac{k+1}{N}}) \setminus \bigcup_{j=1}^k Q_{\frac{j}{N}} \quad \text{sowie} \quad E_\infty = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{\frac{j}{N}}.$$

Die Vereinigung $E = E_\infty \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ ist disjunkt, daher gilt

$$\lambda(E) = \lambda(E_\infty) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(E_k).$$

Sei nun $\theta : X \rightarrow [0, \infty]$ die Funktion aus Lemma 5.1. Wegen $E_k \subset Q_{\frac{k+1}{N}} \cap P_{\frac{k}{N}}$ gilt dann $\frac{k}{N} \leq \theta \leq \frac{k+1}{N}$ für μ -fast-alle $x \in E_k$. Es folgt

$$\frac{k}{N}\mu(E_k) \leq \int_{E_k} \theta d\mu \leq \frac{k+1}{N}\mu(E_k).$$

¹³ also $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ mit $E_k \in \mathcal{E}$ und $\mu(E_k) < \infty$.

Aber $\frac{k}{N}\mu(E_k) \leq \lambda(E_k) \leq \frac{k+1}{N}\mu(E_k)$ nach Definition der Zerlegung. Somit gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda(E_k) - \frac{1}{N}\mu(E_k) \leq \int_{E_k} \theta d\mu \leq \lambda(E_k) + \frac{1}{N}\mu(E_k)$$

Auf E_∞ ist $\theta = \infty$ μ -fast-überall. Ist $\mu(E_\infty) > 0$, so folgt $\lambda(E_\infty) = \infty$ wegen $(\lambda - \frac{k}{N}\mu)(E_\infty) \geq 0$ für alle k . Ist dagegen $\mu(E_\infty) = 0$, so folgt $\lambda(E_\infty) = 0$ aus der Voraussetzung $\lambda \ll \mu$. In beiden Fällen haben wir

$$\lambda(E_\infty) = \int_{E_\infty} \theta d\mu.$$

Durch Summation über $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ folgt insgesamt

$$\lambda(E) - \frac{1}{N}\mu(E) \leq \int_E \theta d\mu \leq \lambda(E) + \frac{1}{N}\mu(E),$$

also mit $N \rightarrow \infty$ die gewünschte Darstellung.

Sei schließlich nur $X = \bigcup_{k=1}^\infty X_k$ mit $X_k \in \mathcal{E}$ und $\mu(X_k) < \infty$. Einschränkung auf $\mathcal{E}_k = \{E \cap X_k : E \in \mathcal{E}\}$ liefert Maße μ_k, λ_k , wobei $\mu_k(X_k) < \infty$. Wie gezeigt hat λ_k eine Dichte θ_k bezüglich μ_k , die eindeutig ist bis auf Abänderung in einer μ_k -Nullmenge. Ist θ Dichte von λ bezüglich μ , so folgt $\theta|_{X_k} = \theta_k$ bis auf eine μ -Nullmenge in X_k . Dies beweist die Eindeutigkeit von θ . Für die Existenz setze

$$\theta = \theta_k \quad \text{auf } X_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} X_j.$$

Wegen der Eindeutigkeit ist $\theta_k|_{X_j} = \theta_j$ für $k > j$, bis auf eine μ -Nullmenge. Die Darstellungsformel ergibt sich mit $k \rightarrow \infty$. \square

Satz 5.6 (Lebesgue-Zerlegung) *Seien λ, μ zwei σ -endliche Maße auf $\mathcal{E} \subset 2^X$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_{sing}$, wobei*

$$\begin{aligned} \lambda_{ac}(E) &= \int_E \theta d\mu \quad \text{absolutstetig bezüglich } \mu, \\ \lambda_{sing}(E) &= \lambda(E \cap N), \quad \text{wobei } N \text{ eine } \mu\text{-Nullmenge ist.} \end{aligned}$$

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist $\nu = \lambda + \mu$ ein σ -endliches Maß, und λ, μ sind absolutstetig bezüglich ν . Mit Satz 5.5 gibt es messbare Funktionen $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$, so dass

$$\lambda(E) = \int_E f d\nu \quad \text{und} \quad \mu(E) = \int_E g d\nu.$$

Wähle $N = \{x \in X : g(x) = 0\}$, also $\mu(N) = 0$. Setze nun

$$\lambda_{ac}(E) = \int_{E \setminus N} f d\nu \quad \text{und} \quad \lambda_{sing}(E) = \lambda(E \cap N).$$

Dann ist $\lambda = \lambda_{ac} + \lambda_{sing}$ nach Definition. Aus $\mu(E) = 0$ folgt $g = 0$ für ν -fast-alle $x \in E$, also $\nu(E \setminus N) = 0$ und damit $\lambda_{ac}(E) = 0$. Dies zeigt $\lambda_{ac} \ll \mu$, und die Existenz der Dichte θ folgt

aus Satz 5.5. Zur Eindeutigkeit: ist $\lambda = \lambda_{ac}^1 + \lambda_{sing}^1 = \lambda_{ac}^2 + \lambda_{sing}^2$ mit zugehörigen Nullmengen $N_{1,2}$, so gilt $\lambda(N_1 \setminus N_2) = \lambda_{ac}^2(N_1) = 0$ und daraus

$$\lambda_{sing}^1(E) = \lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_1 \cap N_2) = \lambda_{sing}^2(E).$$

□

Beispiel 5.1 Im Satz von Radon-Nikodym kann die Voraussetzung, dass μ σ -endlich ist, nicht weggelassen werden. Betrachte zum Beispiel auf dem System der Borelmengen in $[0, 1]$ das Zählmaß card und das Lebesguemaß \mathcal{L}^1 . Es gilt

$$\text{card}(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \emptyset.$$

Also ist \mathcal{L}^1 absolutstetig bezüglich card . Wäre aber $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ Dichtefunktion von \mathcal{L}^1 bezüglich card , so folgt für beliebiges $x \in [0, 1]$

$$0 = \mathcal{L}^1(\{x\}) = \int_{\{x\}} \theta \, d\text{card} = \theta(x),$$

also $\theta \equiv 0$ und somit $\mathcal{L}^1 = 0$, Widerspruch.

Beispiel 5.2 Im Zerlegungssatz von Lebesgue kann auf die Voraussetzung der σ -Endlichkeit von λ nicht verzichtet werden. Betrachte dazu $\lambda = \text{card}$ und $\mu = \mathcal{L}^1$ auf dem System der Borelmengen in $[0, 1]$. Angenommen es gibt eine Zerlegung $\text{card} = \text{card}_{ac} + \text{card}_{sing}$. Sei N die zugehörige Nullmenge. Dann gilt für jedes $x \notin N$

$$\text{card}_{sing}(\{x\}) = 0 \quad \text{und} \quad \text{card}_{ac}(\{x\}) = \int_{\{x\}} \theta \, d\mathcal{L}^1 = 0.$$

Es folgt $N = [0, 1]$, aber das ist keine \mathcal{L}^1 -Nullmenge, Widerspruch.

Wir kommen nun zurück zum eigentlichen Thema, nämlich den L^p -Funktionen.

Lemma 5.2 Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. μ sei Maß auf der σ -Algebra \mathcal{E} über X , σ -endlich im Fall $p = \infty$. Dann ist die Abbildung

$$(5.12) \quad \Lambda : L^p(\mu) \rightarrow L^q(\mu)', \quad \Lambda f(g) = \int_X fg \, d\mu,$$

eine isometrische Injektion.

BEWEIS: Nach der Hölderschen Ungleichung, Satz 5.1, gilt

$$|\Lambda f(g)| \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)},$$

also $\Lambda f \in L^q(\mu)'$ mit Norm $\|\Lambda f\| \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$. Es ist zu zeigen, dass $\|\Lambda f\| \geq \|f\|_{L^p(\mu)}$.

Fall 1: $1 \leq p < \infty$

Betrachte die Funktion $g = \text{sign}(f)|f|^{p-1}$. Im Fall $p > 1$ folgt wegen $(p-1)q = p$

$$\Lambda f(g) = \int_X |f|^p \, d\mu = \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Für $p = 1$ gilt $\|g\|_{L^\infty(\mu)} = 1$ nach Definition, somit

$$\Lambda f(g) = \int_X |f| d\mu = \|f\|_{L^1(\mu)} \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Fall 2: $p = \infty$

Sei $0 < \alpha < \|f\|_{L^\infty(\mu)}$, also $\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0$. Nach Voraussetzung ist $X = \bigcup_{k=1}^\infty X_k$ mit $X_k \in \mathcal{E}$ und $\mu(X_k) < \infty$. Sei $X_{k,\alpha} = X_k \cap \{|f| > \alpha\}$. Dann ist $\mu(X_{k,\alpha}) > 0$ für k hinreichend groß, und mit $g = \chi_{X_{k,\alpha}} \operatorname{sign}(f)$ folgt

$$\Lambda f(g) = \int_{X_{k,\alpha}} |f| d\mu \geq \alpha \mu(X_{k,\alpha}) = \alpha \|g\|_{L^1(\mu)}.$$

Es folgt $\|\Lambda f\| \geq \alpha$, und somit $\|\Lambda f\| \geq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$. \square

Lemma 5.3 Sei μ Maß auf der σ -Algebra \mathcal{E} über X , und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ist $f \in L^1(\mu)$ mit

$$\int_X f\psi d\mu \leq \|\psi\|_{L^q(\mu)} \quad \text{für alle endlichen Treppenfunktionen } \psi,$$

so folgt $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1$.

Vorbemerkung. Zu $f \geq 0$ messbar gibt es eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $f_k \geq 0$ mit $f_k \nearrow f$ punktweise auf X . Zum Beispiel setze $f_0 \equiv 0$ und für $k \geq 1$

$$f_k(x) = \begin{cases} f_{k-1}(x) + \frac{1}{k} & \text{falls } f_{k-1}(x) + \frac{1}{k} \leq f(x) \\ f_{k-1}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Folge f_k ist monoton wachsend mit $f_k(x) \leq f(x)$ für alle k , insbesondere gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \leq f(x)$. Ist $f(x) = \infty$, so folgt $f_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \rightarrow \infty$. Ist $f(x) < \infty$, so tritt für unendlich viele k die zweite Alternative $f_{k-1}(x) + \frac{1}{k} > f(x)$ ein, somit gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \geq f(x)$.

BEWEIS: (von Lemma 5.3) Sei $\varphi_k \geq 0$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_k \nearrow |f|$ punktweise auf X . Da $\|\varphi_k\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^1(\mu)} < \infty$, haben die Niveaumengen $\{\varphi_k = s\}$ endliches Maß, und damit hat φ_k auch endliche L^p -Norm für alle $p \in [1, \infty]$.

Fall 1: $1 < p, q < \infty$

Die Funktion $\psi_k = \varphi_k^{p-1} \operatorname{sign}(f)$ ist Treppenfunktion mit

$$\|\psi_k\|_{L^q(\mu)} = \left(\int_X |\varphi_k|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{und} \quad \int_X f\psi_k d\mu = \int_X |f| \varphi_k^{p-1} d\mu.$$

Aus der Definition der φ_k und der Voraussetzung ergibt sich

$$\int_X \varphi_k^p d\mu \leq \int_X |f| \varphi_k^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X \varphi_k^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

und damit $\|\varphi_k\|_{L^p(\mu)} \leq 1$. Mit monotoner Konvergenz folgt für $k \rightarrow \infty$ die Behauptung.

Fall 2: $p = 1, q = \infty$

Wähle $\psi = \text{sign}(f)$. Dann gilt

$$\|\psi\|_{L^\infty(\mu)} = 1 \quad \text{und} \quad \int_X f\psi \, d\mu = \|f\|_{L^1(\mu)},$$

also $\|f\|_{L^1(\mu)} \leq 1$ nach Voraussetzung.

Fall 3: $p = \infty, q = 1$

Sei $s > 0$ mit $\mu(\{|f| > s\}) > 0$. Mit $\psi = \chi_{\{|f| > s\}} \text{sign}(f)$ gilt

$$\|\psi\|_{L^1(\mu)} = \mu(\{|f| > s\}) \quad \text{und} \quad \int_X f\psi \, d\mu = \int_{\{|f| > s\}} |f| \, d\mu \geq s\mu(\{|f| > s\}).$$

Es folgt $s\mu(\{|f| > s\}) \leq \mu(\{|f| > s\})$, also $s \leq 1$, das heißt $\|f\|_{L^\infty(\mu)} \leq 1$. \square

Satz 5.7 (L^p - L^q -Dualität) Sei $1 \leq q < \infty$, und μ sei Maß auf X , σ -endlich im Fall $q = 1$. Mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist die Abbildung

$$\Lambda : L^p(\mu) \rightarrow L^q(\mu)', \quad \Lambda f(g) = \int_X fg \, d\mu,$$

eine surjektive Isometrie.

Der wesentliche Punkt ist die Surjektivität: zu jedem $\phi \in L^q(\mu)'$ gibt es ein $f \in L^p(\mu)$ mit

$$\phi(g) = \int_X fg \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

BEWEIS: Zu zeigen ist nur noch die Surjektivität, vgl. Lemma 5.2. Sei $\phi \in L^q(\mu)'$ gegeben, ohne Einschränkung mit $\|\phi\| = 1$. Wir betrachten erst den Fall $\mu(X) < \infty$. Für E messbar gilt dann $\|\chi_E\|_{L^q(\mu)} = \mu(E)^{1/q} < \infty$, also können wir setzen

$$\lambda(E) = \phi(\chi_E) \quad \text{für } E \subset X \text{ messbar.}$$

Ist $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ disjunkte Vereinigung, so berechnen wir mit monotoner Konvergenz

$$\left\| \sum_{j=k}^{\infty} \chi_{E_j} \right\|_{L^q(\mu)}^q = \int_X \left| \sum_{j=k}^{\infty} \chi_{E_j} \right|^q \, d\mu = \int_X \sum_{j=k}^{\infty} \chi_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j).$$

Wegen $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(E) < \infty$ konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}$ in $L^q(\mu)$, und aus der Stetigkeit von ϕ folgt

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(\chi_{E_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j).$$

Nach dem Satz von Radon-Nikodym, Satz 5.5, existiert eine Funktion $f \in L^1(\mu)$ mit

$$\phi(\chi_E) = \int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu \quad \text{für alle messbaren } E \subset X.$$

Die Integrierbarkeit von f folgt dabei mit $E = X$. Für Treppenfunktionen ψ gilt weiter

$$\int_X f\psi \, d\mu = \phi(\psi) \leq \|\psi\|_{L^q(\mu)},$$

also gilt $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1$ nach Lemma 5.3. Aber für $q < \infty$ sind Treppenfunktionen dicht in $L^q(\mu)$. Durch Approximation folgt nun

$$\phi(g) = \int_X fg \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Im Fall $\mu(X) < \infty$ ist der Satz damit bewiesen.

Sei nun $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ mit $X_k \in \mathcal{E}$ und $\mu(X_k) < \infty$ für alle k . Betrachte die Maße $\mu_k(E) = \mu(E \cap X_k)$ auf \mathcal{E} . Wir haben die isometrische Einbettung

$$L^q(\mu_k) \rightarrow L^q(\mu), \quad g \mapsto \chi_{X_k} g.$$

Für die linearen Funktionale $\phi_k : L^q(\mu_k) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_k(g) = \phi(\chi_{X_k} g)$, gilt damit

$$|\phi_k(g)| \leq \underbrace{\|\phi\|}_{=1} \|\chi_{X_k} g\|_{L^q(\mu)} = \|g\|_{L^q(\mu_k)}.$$

Wie bewiesen gibt es $f_k \in L^p(\mu_k)$ mit $\|f_k\|_{L^p(\mu_k)} \leq 1$ und

$$\phi_k(g) = \int_X f_k g \, d\mu_k = \int_X f_k g \chi_{X_k} \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu_k).$$

Es folgt $\|f_k\|_{L^p(\mu; X_k)} = \|f_k\|_{L^p(\mu_k)} \leq 1$. Für $l \geq k$ gilt wegen Eindeutigkeit $f_l = f_k$ auf X_k μ -fast-überall. Wir definieren nun

$$f := f_k \quad \text{auf } X_k \setminus X_{k-1} \quad (\text{wobei } X_0 = \emptyset).$$

Dann ist $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1$, und für $g \in L^q(\mu)$ folgt wegen $\chi_{X_k} g \rightarrow g$ in $L^q(\mu)$

$$\phi(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(\chi_{X_k} g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k g \chi_{X_k} \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

Schließlich zeigen wir, dass die Voraussetzung der σ -Endlichkeit im Fall $1 < q < \infty$ unnötig ist. Für $E \subset X$ σ -endlich sei $f_E \in L^p(\mu)$ mit $f_E = 0$ auf $X \setminus E$, so dass gilt

$$\phi(g) = \int f_E g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Die Existenz von f_E folgt analog zu den f_k oben. Für $E \subset E'$ gilt, wieder wegen der Eindeutigkeit, $f_E = f_{E'}$ μ -fast-überall auf E . Setze nun

$$\lambda(E) = \int_X |f_E|^p \, d\mu_E.$$

Es folgt $\lambda(E) \leq 1$ sowie $\lambda(E) \leq \lambda(E')$ für $E \subset E'$. Wähle $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ σ -endlich mit

$$\lambda(E_k) \rightarrow \sup\{\lambda(E) : E \text{ } \sigma\text{-endlich}\} =: L.$$

Dann ist $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ebenfalls σ -endlich, und es folgt für jedes σ -endliche $E \subset X$

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k) \leq \lambda(Y) \leq L.$$

Ist $Y \subset E$ mit E σ -endlich, so folgt $f_E = f_Y$ μ -fast-überall auf Y , insbesondere

$$\int_X |f_E|^p d\mu = \lambda(E) \leq \lambda(Y) = \int_X |f_Y|^p d\mu = \int_X |f_E|^p d\mu,$$

das heißt $f_E = f_Y$ μ -fast-überall auf X . Wir zeigen nun, dass ϕ durch f_Y dargestellt wird. Für $g \in L^q(\mu)$ gilt

$$\{|g| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|g| \geq \frac{1}{k}\} \quad \text{wobei } \mu(\{|g| \geq \frac{1}{k}\}) \leq k^q \|g\|_{L^q(\mu)}^q < \infty.$$

Somit ist $E = \{|g| > 0\}$ σ -endlich, und damit auch $Y \cup E$. Wir erhalten

$$\phi(g) = \int_X f_E g d\mu = \int_X f_Y g d\mu.$$

□

Beispiel 5.3 Sei $I = [0, 1]$. Die Projektion auf die fast-überall Äquivalenzklasse

$$(C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)}) \rightarrow (L^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty(I)}),$$

ist isometrisch und identifiziert $C^0(I)$ mit einem abgeschlossenen, echten Unterraum von $L^\infty(I)$. Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.1, gibt es ein $\phi \in L^\infty(I)'$ mit $\phi = 0$ auf $C^0(I)$, aber $\|\phi\| = 1$. Angenommen es gibt ein $f \in L^1([0, 1])$ mit

$$\phi(g) = \int_I f g d\mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } g \in L^\infty(I),$$

also insbesondere

$$0 = \int_I f g d\mathcal{L}^1 \quad \text{für alle } g \in C^0(I).$$

Das Fundamentallema der Variationsrechnung impliziert dann $f = 0$ fast überall auf I , also $\phi = 0$, ein Widerspruch. Dies zeigt

$$L^1(I) \not\subset L^\infty(I)'$$

6 Der Dualraum von $C^0(X)$

Im vorigen Kapitel haben wir die Dualräume von $L^q(\mu)$ bestimmt. Dabei ging es um Maße auf einem abstrakten Maßraum, der Fall $q = \infty$ war ausgeschlossen. Unser Hauptziel ist jetzt die Charakterisierung des Dualraums von $C^0(X)$, wobei X ein kompakter metrischer Raum ist. Als erstes ergibt sich die Frage, wie die metrische Struktur und die Maßtheorie zusammengehen. Ein zentraler Begriff ist dabei das System der Borelmengen: dies ist der Durchschnitt aller σ -Algebren, die die offenen Mengen enthalten. Einige der folgenden Überlegungen sind im Fall des Lebesguemaßes bereits wohlbekannt.

Definition 6.1 Ein äußeres Maß μ auf X heißt Borelregulär, wenn gilt:

- (1) Jede Borelmenge $B \subset X$ ist μ -messbar.
- (2) Zu jedem $S \subset X$ gibt es eine Borelmenge $B \supset S$ mit $\mu(B) = \mu(S)$.

Das Maß heißt Radonmaß, wenn zusätzlich $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten $K \subset X$.

Lemma 6.1 Sei μ Borelreguläres Maß auf X und $E \subset X$. Das Maß $(\mu \llcorner E)(S) = \mu(S \cap E)$ ist ebenfalls Borelregulär, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

- (1) E ist Borelmenge
- (2) E ist σ -endlich, das heißt $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ für μ -messbare E_j mit $\mu(E_j) < \infty$.

BEWEIS: Wir zeigen erst, dass jede Borelmenge B messbar ist bezüglich $\mu \llcorner E$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\mu \llcorner E)(S) &= \mu(E \cap S) \\ &= \mu((E \cap S) \cap B) + \mu((E \cap S) \setminus B) \\ &= \mu(E \cap (S \cap B)) + \mu(E \cap (S \setminus B)) \\ &= (\mu \llcorner E)(S \cap B) + (\mu \llcorner E)(S \setminus B). \end{aligned}$$

Eigenschaft (2) aus Definition 6.1 zeigen wir für $\mu \llcorner E$ in drei Fällen:

Fall 1: Sei E Borelmenge. Wähle zu $S \subset X$ eine Borelmenge $B_1 \supset E \cap S$ mit $\mu(B_1) = \mu(E \cap S)$. Dann ist $B = B_1 \cup (X \setminus E)$ Borel mit $B \supset S$ und es gilt

$$(\mu \llcorner E)(B) = \mu(E \cap B_1) \leq \mu(B_1) = (\mu \llcorner E)(S).$$

Fall 2: Sei E μ -messbar mit $\mu(E) < \infty$. Wähle $B \supset E$ Borel mit $\mu(B) = \mu(E)$. Wir zeigen $\mu \llcorner E = \mu \llcorner B$, die Behauptung folgt dann aus Fall 1. Für $S \subset X$ gilt

$$(\mu \llcorner B)(S) = \mu(B \cap S) \leq \mu(E \cap S) + \mu(B \setminus E) = \mu(E \cap S) + \mu(B) - \mu(E) = (\mu \llcorner E)(S).$$

Fall 3: Sei $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ mit E_j μ -messbar und $\mu(E_j) < \infty$. Wir können $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ annehmen. Wie gezeigt gibt es zu $S \subset X$ Borelmengen $B_j \supset S$ mit $\mu \llcorner E_j(B_j) = \mu \llcorner E_j(S)$. Dann ist $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ Borel mit $B \supset S$, und es gilt

$$\mu \llcorner E(B) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j \cap B) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j \cap B_j) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j \cap S) \leq (\mu \llcorner E)(S).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Satz 6.1 (Caratheodory-Kriterium) Sei μ äußeres Maß auf dem metrischen Raum (X, d) mit folgender Eigenschaft:

$$A, B \subset X, \text{dist}(A, B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Dann sind alle Borelmengen μ -messbar.

BEWEIS: Wir zeigen dass jede abgeschlossene Menge $C \subset X$ messbar ist, dass also gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap C) + \mu(S \setminus C) \quad \text{für alle } S \subset X.$$

Natürlich können wir dazu $\mu(S) < \infty$ annehmen. Setze $C_k = \{x \in X : \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\text{dist}(S \cap C, S \setminus C_k) \geq \frac{1}{k} > 0$ gilt nach Voraussetzung

$$\mu(S \cap C) + \mu(S \setminus C_k) = \mu((S \cap C) \cup (S \setminus C_k)) \leq \mu(S).$$

Es reicht also aus zu zeigen

$$(6.13) \quad \mu(S \setminus C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S \setminus C_k).$$

Die Folge $S \setminus C_k$ ist aufsteigend mit $S \setminus C = \bigcup_{k=1}^{\infty} S \setminus C_k$. Allerdings folgt (6.13) daraus nicht direkt, denn die Mengen sind eventuell nicht messbar. Betrachte

$$S_k = \{x \in S : \frac{1}{k+1} < \text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\}.$$

Da C abgeschlossen, gilt für $k \in \mathbb{N}$ die Darstellung $S \setminus C = S \setminus C_k \cup \bigcup_{j=k}^{\infty} S_j$, und es folgt

$$\mu(S \setminus C) \leq \mu(S \setminus C_k) + \sum_{j=k}^{\infty} \mu(S_j).$$

Also reicht es zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$ konvergiert. Aber es gilt

$$\text{dist}(S_i, S_j) \geq \frac{1}{i+1} - \frac{1}{j} > 0 \quad \text{für } j \geq i+2.$$

Durch Induktion erhalten wir aus der Voraussetzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mu(S_{2i}) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^N S_{2i}\right) \leq \mu(S) < \infty, \\ \sum_{i=1}^N \mu(S_{2i-1}) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^N S_{2i-1}\right) \leq \mu(S) < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz gezeigt. □

Die folgende Approximationseigenschaft ist für $\mu = \mathcal{L}^n$ wohlbekannt.

Satz 6.2 (Approximationssatz) Sei μ ein Borelreguläres Maß auf (X, d) . Es gebe eine Ausschöpfung $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ mit X_j offen und $\mu(X_j) < \infty$. Dann gilt:

$$(1) \quad \mu(A) = \inf_{A \subset U \text{ offen}} \mu(U) \quad \text{für alle } A \subset X.$$

$$(2) \quad \mu(A) = \inf_{C \subset A \text{ abgeschlossen}} \mu(C) \quad \text{für alle messbaren } A \subset X.$$

BEWEIS: Wir zeigen (1) erst im Fall $\mu(X) < \infty$, und zwar behaupten wir

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ Borel, (1) gilt}\} \text{ ist die Borelalgebra.}$$

Mit Definition 6.1(2) folgt daraus (1) für alle Mengen A . Wir zeigen nun, dass \mathcal{A} unter abzählbaren Durchschnitten und Vereinigungen abgeschlossen ist. Seien $A_j \in \mathcal{A}$. Dann gibt es $U_j \supset A_j$ offen mit

$$\mu(U_j \setminus A_j) = \mu(U_j) - \mu(A_j) < 2^{-j}\varepsilon.$$

Links wurde A_j messbar verwendet. Es folgt

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\right) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \setminus A_j\right) < \varepsilon.$$

Nun gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{j=1}^k U_j\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\right)$, wobei $\mu(X) < \infty$ benutzt wird. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^k U_j\right) < \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \varepsilon.$$

Das beweist $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Weiter folgt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \setminus A_j\right) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) - \varepsilon.$$

Also ist auch $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Es ist nicht direkt klar, dass \mathcal{A} abgeschlossen unter der Bildung von Komplementmengen ist. Wir können uns aber mit einem Trick behelfen: das System $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} : X \setminus A \in \mathcal{A}\}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung, und auch abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen wegen $X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} X \setminus A_j$. Ferner enthält \mathcal{A}' die offenen Mengen, denn für $C \subset X$ abgeschlossen gilt

$$C = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{x \in X : \text{dist}(x, C) > \frac{1}{j}\right\} \in \mathcal{A}.$$

Somit ist \mathcal{A}' , und damit auch \mathcal{A} , die Borelalgebra. Im Fall $\mu(X) < \infty$ ist (1) bewiesen.

Sei nun $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ mit X_j offen und $\mu(X_j) < \infty$. Nach Lemma 6.1 ist dann $\mu \llcorner X_j$ Borelregulär. Wie bewiesen gibt es zu $\varepsilon > 0$ demnach $U_j \supset A$ offen mit

$$(\mu \llcorner X_j)(U_j) \leq (\mu \llcorner X_j)(A) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Wir können wieder A Borel annehmen, insbesondere ist A messbar bezüglich $\mu \llcorner X_j$ und

$$(\mu \llcorner X_j)(U_j \setminus A) = (\mu \llcorner X_j)(U_j) - (\mu \llcorner X_j)(A) \leq 2^{-j}\varepsilon.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \cap X_j)\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \cap X_j) \cap A\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \cap X_j) \setminus A\right) \\ &= \mu(A) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \cap (U_j \setminus A)\right) \\ &\leq \mu(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung (1) allgemein bewiesen.

Wir kommen nun zu (2), erst im Fall $\mu(X) < \infty$. Nach (1) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $U \supset X \setminus A$ offen mit $\mu(U) < \mu(X \setminus A) + \varepsilon$. Dann ist $C = X \setminus U \subset A$ abgeschlossen, und es folgt

$$\mu(C) = \mu(X \setminus U) = \mu(X) - \mu(U) > \mu(X) - \mu(X \setminus A) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon.$$

Im letzten Schritt wurde die Messbarkeit von A benutzt. Ist nur $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ mit X_j offen, $\mu(X_j) < \infty$, so gibt es $C_j \subset A$ abgeschlossen mit $\mu_{\lfloor X_j}(C_j) \geq \mu_{\lfloor X_j}(A) - \varepsilon$. Wir können $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ annehmen. Es folgt

$$\mu(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(X_j \cap A) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_j) + \varepsilon.$$

Also gilt (2) auch in diesem Fall. □

Ab jetzt setzen wir voraus, dass Abstandskugeln in (X, d) relativ kompakt sind:

$$(6.14) \quad \text{Für alle } x \in X, \varrho > 0 \text{ ist } \overline{B_{\varrho}(x)} = \{y \in X : d(x, y) \leq \varrho\} \text{ kompakt.}$$

Im Euklidischen Raum \mathbb{R}^n ist das natürlich erfüllt, ebenso in abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Es gilt folgende Version von Satz 6.2.

Folgerung 6.1 *Sei X metrischer Raum mit (6.14). Dann gilt für ein Radonmaß μ auf X*

$$(1) \quad \mu(A) = \inf_{A \subset U \text{ offen}} \mu(U) \quad \text{für alle } A \subset X.$$

$$(2) \quad \mu(A) = \sup_{K \subset A \text{ kompakt}} \mu(K) \quad \text{für alle } A \subset X \text{ messbar.}$$

BEWEIS: Da μ Radonmaß, gilt $\mu(\overline{B_{\varrho}(x)}) < \infty$. Wegen $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j(0)$ folgt Aussage (1) aus Satz 6.2. Für $C \subset X$ abgeschlossen ist $C \cap \overline{B_j(0)}$ kompakt und $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C \cap \overline{B_j(0)}) = \mu(C)$. Aussage (2) folgt wieder mit Satz 6.2. □

Wir kommen jetzt zu dem Darstellungsproblem. Sei μ ein Radonmaß auf (X, d) und $\eta : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ sei μ -messbar mit $|\eta(x)| = 1$ für μ -fast-alles $x \in X$. Betrachte die Linearform

$$(6.15) \quad \phi : C_c^0(X, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_X \langle f, \eta \rangle d\mu.$$

Die Standardabschätzung des Integrals durch das Supremum der Funktion ergibt

$$(6.16) \quad |\phi(f)| \leq C(K) \|f\|_{C^0(X)} \quad \text{für } \text{spt } f \subset K.$$

Die Abschätzung gilt hier mit $C(K) = \mu(K) < \infty$. Das bedeutet: für jedes kompakte K ist die Linearform ϕ stetig auf dem Unterraum der Funktionen $f \in C_c^0(X)$ mit Träger in K . Ist zum Beispiel X selbst kompakt, so ist ϕ stetig auf ganz $C^0(X)$. Eine Linearform ϕ mit (6.16) nennen wir ein lineares Funktional auf $C_c^0(X)$. Wir wollen beweisen, dass jedes lineare Funktional ϕ auf $C_c^0(X)$ eine Darstellung wie in (6.15) hat. Das Maß μ ist dabei wie folgt.

Definition 6.2 *Sei $\phi : C_c^0(X, \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ lineares Funktional, also mit (6.16). Definiere das zugehörige Variationsmaß $|\phi| : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ in zwei Schritten:*

(1) $|\phi|(U) = \sup\{\phi(f) : |f| \leq 1, \text{spt } f \subset U\}$ für U offen,

(2) $|\phi|(E) = \inf\{|\phi|(U) : U \supset E, U \text{ offen}\}$ für E beliebig.

Die Schritte sind konsistent, denn in (1) hat man $|\phi|(U) \leq |\phi|(V)$ für $U \subset V$.

Satz 6.3 (vom Variationsmaß) Das Variationsmaß $|\phi|$ ist ein Radonmaß.

BEWEIS:

Schritt 1: $|\phi|$ ist ein äußeres Maß.

Für $U = \emptyset$ ist nur die Nullfunktion in Definition 6.2(1) zulässig, also ist $|\phi|(\emptyset) = 0$. Seien U_j , $j \in \mathbb{N}$, offen und $f \in C_c^0(X)$ mit $|f| \leq 1$ und $\text{spt } f \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$. Nach Heine-Borel gilt

$$\text{spt } f \subset \bigcup_{j=1}^N U_j \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N}.$$

Wähle eine untergeordnete Teilung der Eins $\chi_j \in C_c^0(X)$:

$$\text{spt } \chi_j \subset U_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \chi_j = 1 \text{ auf } \text{spt } f.$$

Für $f_j = \chi_j f \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$ ist $\text{spt } f_j \subset U_j$, sowie $|f_j| \leq 1$ und $f = \sum_{j=1}^N f_j$. Also folgt

$$\phi(f) = \sum_{j=1}^N \phi(f_j) \leq \sum_{j=1}^N |\phi|(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\phi|(U_j).$$

Bilden wir das Supremum über alle solche Funktionen f , so folgt

$$|\phi|\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\phi|(U_j).$$

Sei nun $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ mit E, E_j beliebig. Wähle zu $\varepsilon > 0$ offene $U_j \supset E_j$ mit $|\phi|(U_j) < |\phi|(E_j) + 2^{-j}\varepsilon$; dies geht nach Definition 6.2. Es folgt $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ und weiter

$$|\phi|(E) \leq |\phi|\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\phi|(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\phi|(E_j) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Subadditivität von $|\phi|$.

Schritt 2: Borelmengen sind $|\phi|$ -messbar.

Das zeigen wir mit Caratheodory. Seien $A, B \subset X$ mit $\text{dist}(A, B) > 0$. Zu zeigen ist

$$|\phi|(W) \geq |\phi|(A) + |\phi|(B) \quad \text{für alle offenen } W \supset (A \cup B).$$

Für $\delta > 0$ hinreichend klein sind $U = B_\delta(A) \cap W$ und $V = B_\delta(B) \cap W$ disjunkt. Seien $f, g \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$ mit $\text{spt } f \subset U$, $\text{spt } g \subset V$ und $|f|, |g| \leq 1$, so gilt $\text{spt}(f+g) \subset (\text{spt } f \cup \text{spt } g) \subset W$ und $|f+g| \leq 1$ auf ganz X . Es folgt

$$\phi(f) + \phi(g) = \phi(f+g) \leq |\phi|(W).$$

Durch Bilden des Supremums über alle f, g ergibt sich

$$|\phi|(A) + |\phi|(B) \leq |\phi|(U) + |\phi|(V) \leq |\phi|(W).$$

Schritt 3: *Konstruktion der Borelhülle und Endlichkeit auf kompakten Mengen.*

Für $E \subset X$ mit $|\phi|(E) < \infty$ wähle offene $U_j \supset E$ mit $|\phi|(U_j) \leq |\phi|(E) + \frac{1}{j}$, ohne Einschränkung sei $U_1 \supset U_2 \supset \dots$. Dann ist $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \supset E$ Borelmenge mit

$$|\phi|(B) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} |\phi|(U_j) = |\phi|(E).$$

Somit ist $|\phi|$ Borelregulär. Ist schließlich K kompakt, so gibt es nach Voraussetzung $U \supset K$ offen mit \bar{U} kompakt, also nach Voraussetzung (6.14)

$$|\phi|(K) \leq |\phi|(U) \leq C(\bar{U}) < \infty.$$

□

Ergänzung. Wir wollen noch die Teilung der Eins konstruieren. Sei $K \subset X$ kompakt, $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ mit U_λ offen. Zu $x \in K$ bestimme $r(x) > 0$ und $\lambda(x) \in \Lambda$ mit

$$\overline{B_{2r(x)}(x)} \subset U_{\lambda(x)}.$$

Nach Heine-Borel ist $K \subset \bigcup_{j=1}^N B_{r_j}(x_j)$ mit $r_j = r(x_j)$. Wähle $\tilde{\chi}_j \in C_c^0(X)$ nichtnegativ mit

$$\tilde{\chi}_j = \begin{cases} 1 & \text{auf } B_{r_j}(x_j) \\ 0 & \text{auf } X \setminus B_{2r_j}(x_j). \end{cases}$$

Setze $\chi = \sum_{j=1}^N \tilde{\chi}_j$. Dann gilt $\chi \geq 1$ auf K , also $\chi > \frac{1}{2}$ auf einer offenen Umgebung U von K . Wähle $\eta \in C_c^0(X)$ mit $\text{spt } \eta \subset U$ und $\eta|_K = 1$, und setze schließlich

$$\chi_j = \eta \tilde{\chi}_j / \chi \in C_c^0(X).$$

Nach Konstruktion ist dann $\text{spt } \chi_j \subset \overline{B_{2r_j}(x_j)} \subset U_{\lambda(x_j)}$, und $\sum_{j=1}^N \chi_j = 1$ auf K .

Unser Ziel ist folgendes Darstellungsergebnis.

Satz 6.4 (Darstellungssatz von Riesz) *Sei (X, d) metrischer Raum mit (6.14). Dann gibt es zu jedem linearen Funktional ϕ auf $C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$ ein Radonmaß μ und eine μ -messbare Funktion $\eta : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $|\eta(x)| = 1$ für μ -fast-alle $x \in X$, so dass gilt*

$$(6.17) \quad \phi(f) = \int_X \langle f, \eta \rangle d\mu \quad \text{für alle } f \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k).$$

Das Paar μ, η ist eindeutig bestimmt, und es ist $\mu = |\phi|$ das Variationsmaß.

Wir brauchen zum Beweis folgendes Approximationsresultat.

Satz 6.5 (Lusin) *Sei μ ein Radonmaß auf (X, d) , und $A \subset X$ mit $\mu(A) < \infty$. Ist $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, so gibt es ein $\tilde{g} \in C^0(X)$ mit*

$$\mu(\{x \in A : \tilde{g}(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|\tilde{g}\|_{C^0(X)} \leq \sup_{x \in A} |g(x)|.$$

Wir werden das später beweisen, und nun den Darstellungssatz angehen.

BEWEIS: (*Eindeutigkeit*) Sei λ, ζ auch mit mit der Darstellungseigenschaft, das heißt

$$\phi(f) = \int_X \langle f, \zeta \rangle d\lambda \quad \text{für alle } f \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k).$$

Ist $\text{spt } f \subset U$ und $|f| \leq 1$, so folgt $\phi(f) \leq \lambda(U)$ und hieraus $\mu(U) = |\phi|(U) \leq \lambda(U)$. Mit Folgerung 6.1(1) haben wir $\mu \leq \lambda$. Sei andererseits $K \subset X$ kompakt. Zu $U \supset K$ offen mit \bar{U} kompakt und zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lusin ein $\tilde{\zeta} \in C^0(X, \mathbb{R}^k)$, so dass gilt:

$$\lambda(E) < \varepsilon \text{ mit } E = \{x \in U : \tilde{\zeta}(x) \neq \zeta(x)\} \quad \text{und} \quad \|\tilde{\zeta}\|_{C^0(X)} \leq \sup_{x \in U} |\zeta| \leq 1.$$

Satz 6.5 liefert $|\tilde{\zeta}_i| \leq 1$ für jede Komponente, man kann $\tilde{\zeta}$ dann noch auf die Einheitskugel projizieren. Wähle $\chi \in C_c^0(X)$, $0 \leq \chi \leq 1$, mit $\text{spt } \chi \subset U$ und $\chi \equiv 1$ auf K . Schätze dann ab

$$\begin{aligned} \mu(U) &\geq \phi(\chi\tilde{\zeta}) \quad (\text{Definition von } \mu(U) = |\phi|(U)) \\ &= \int_U \langle \chi\tilde{\zeta}, \zeta \rangle d\lambda \\ &= \int_U \chi d\lambda - \int_U \chi(\langle \tilde{\zeta}, \zeta \rangle - 1) d\lambda \\ &\geq \lambda(K) - 2\lambda(E) \\ &\geq \lambda(K) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ und $U \searrow K$ folgt $\mu(K) \geq \lambda(K)$, somit $\mu = \lambda$ auf Borelmengen nach Folgerung 6.1(2). Zu $E \subset X$ gibt es $B, B' \supset E$ Borel mit $\mu(B) = \mu(E)$ und $\lambda(B') = \lambda(E)$. Wir können $B = B'$ annehmen, sonst gehe über zu $B \cap B'$. Es folgt $\mu(E) = \lambda(E)$ allgemein.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^k$ fest. Für alle $f \in C_c^0(X)$ ist dann $fv \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$, also gilt

$$\int_X \langle fv, \eta \rangle d\mu = \int_X \langle fv, \zeta \rangle d\mu \quad \text{für alle } f \in C_c^0(X).$$

$C_c^0(X)$ ist dicht in $L^1(\mu)$ ¹⁴, und beide Seiten sind stetig unter $L^1(\mu)$ -Konvergenz. Es folgt

$$\int_X f \langle v, \eta \rangle d\mu = \int_X f \langle v, \zeta \rangle d\mu \quad \text{für alle } f \in L^1(\mu).$$

Die Funktionen $\langle v, \eta \rangle, \langle v, \zeta \rangle \in L^\infty(\mu)$ stellen also dasselbe lineare Funktional in $L^1(\mu)'$ dar, und sind damit μ -fast-überall gleich nach Lemma 5.2. μ muss dabei σ -endlich sein, das ist erfüllt wegen (6.14). Indem wir für v die Standardvektoren des \mathbb{R}^k wählen, folgt $\zeta = \eta$ μ -fast-überall auf X . \square

BEWEIS: (*Existenz*): Wir wählen $\mu = |\phi|$, das Variationsmaß. Für $v \in \mathbb{R}^k$, $|v| = 1$, sei

$$\phi_v : C_c^0(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_v(f) = \phi(fv).$$

¹⁴Aufgabe 1, Serie 9

Wir wollen zeigen, dass ϕ_v als stetiges lineares Funktional auf $L^1(\mu)$ fortgesetzt werden kann. Dann erhalten wir die Komponente von η bezüglich v aus der Dualität $L^1(\mu)' = L^\infty(\mu)$. Um ϕ_v abzuschätzen, betrachten wir das Funktional

$$\varphi : C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+) \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \varphi(f) = \sup\{\phi(g) : g \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k), |g| \leq f\}.$$

Es gilt

$$(6.18) \quad \mu(U) = \sup\{\varphi(\chi) : \chi \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+), \text{spt } \chi \subset U, \chi \leq 1\}.$$

Denn ist $g \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$ mit $\text{spt } g \subset U$ und $|g| \leq 1$, so folgt

$$\phi(g) \leq \varphi(|g|) \leq \sup\{\varphi(\chi) : \chi \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+), \text{spt } \chi \subset U, \chi \leq 1\}.$$

Ist andererseits $\chi \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+)$ gegeben mit $\chi \leq 1$, so folgt

$$\varphi(\chi) = \sup\{\phi(g) : g \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k), |g| \leq \chi\} \leq \mu(U).$$

Behauptung 1: φ ist halblineares Funktional auf $C_c^0(X)$, das heißt

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha f) &= \alpha \varphi(f) \quad \text{für } f \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+), \alpha \geq 0, \\ \varphi(f_1 + f_2) &= \varphi(f_1) + \varphi(f_2) \quad \text{für } f_{1,2} \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+). \end{aligned}$$

BEWEIS: Die erste Zeile gilt nach Definition. Für die zweite wähle $g_{1,2} \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$ mit $|g_i| \leq f_i$ und $\phi(g_i) \geq \varphi(f_i) - \varepsilon$. Es folgt, bei geeigneter Wahl des Vorzeichens,

$$\varphi(f_1) + \varphi(f_2) - 2\varepsilon \leq |\phi(g_1)| + |\phi(g_2)| = |\phi(g_1 \pm g_2)| \leq \varphi(f_1 + f_2).$$

Für die umgekehrte Ungleichung sei $g \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$ mit $|g| \leq f_1 + f_2$. Betrachte dann

$$g_i = \begin{cases} \frac{f_i}{f_1 + f_2} g & \text{falls } f_1 + f_2 > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt $|g_i| \leq f_i$, insbesondere $g_i \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$. Wegen $g = g_1 + g_2$ folgt

$$|\phi(g)| \leq |\phi(g_1)| + |\phi(g_2)| \leq \varphi(f_1) + \varphi(f_2),$$

und hieraus $\varphi(f_1 + f_2) \leq \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$.

Behauptung 2: Es gilt $\varphi(f) = \int_X f d\mu$ für alle $f \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+)$.

BEWEIS: Wähle zu $\varepsilon > 0$ Zwischenwerte $0 = t_0 < \dots < t_N < \infty$ mit

$$|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon, \quad t_N > \max f \quad \text{und} \quad \mu(f^{-1}\{t_i\}) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Dies ist möglich, denn die Menge der $t > 0$ mit $\mu(f^{-1}\{t\}) > 0$ ist abzählbar wegen $\mu(\text{spt } f) < \infty$. Wir setzen $U_i = f^{-1}(t_{i-1}, t_i)$ für $i = 1, \dots, N$; diese Mengen sind offen.

Abschätzung von $\varphi(f)$ nach unten:

Seien $\chi_i \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+)$ mit $\text{spt } \chi_i \subset U_i$, $\chi_i \leq 1$ für $i = 1, \dots, N$. Dann gilt $\sum_{i=1}^N t_{i-1} \chi_i \leq f$. Nach Definition ist φ monoton, also haben wir

$$\sum_{i=1}^N t_{i-1} \varphi(\chi_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^N t_{i-1} \chi_i\right) \leq \varphi(f).$$

Bilde das Supremum über die χ_i . Mit (6.18) folgt $\sum_{i=1}^N t_{i-1}\mu(U_i) \leq \varphi(f)$, und weiter

$$\int_X f \, d\mu \leq \sum_{i=1}^N t_i \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^N (t_{i-1} + \varepsilon) \mu(U_i) \leq \varphi(f) + \varepsilon \mu(\text{spt } f).$$

Abschätzung von $\varphi(f)$ nach oben:

Für $i = 1, \dots, N$ wähle $V_i \supset \bar{U}_i \cup f^{-1}(\{t_i\})$ offen mit $\mu(V_i) \leq \mu(\bar{U}_i) + \frac{\varepsilon}{N}$. Es gibt $\chi_i \in C_c^0(V_i)$ mit $\text{spt } \chi_i \subset V_i$, $0 \leq \chi_i \leq 1$ und $\chi_i \equiv 1$ auf $\bar{U}_i \cup f^{-1}(\{t_i\})$. Es folgt $f \leq \sum_{i=1}^N t_i \chi_i$ und hieraus

$$\begin{aligned} \varphi(f) &\leq \sum_{i=1}^N t_i \varphi(\chi_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (t_{i-1} + \varepsilon) \mu(V_i) \quad (\text{nach (6.18)}) \\ &\leq \sum_{i=2}^N (t_{i-1} + \varepsilon) (\mu(U_i) + \frac{\varepsilon}{N}) + \varepsilon (\mu(\bar{U}_1) + \frac{\varepsilon}{N}) \\ &\leq \int f \, d\mu + \varepsilon \mu(\text{spt } f) + \varepsilon \|f\|_{C^0(X)} + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ in beiden Abschätzungen folgt Behauptung 2.

Beweis des Satzes: Für $f \in C_c^0(X)$ haben wir $\phi_v(f) = \phi_v(f^+) - \phi_v(f^-)$, also

$$|\phi_v(f)| \leq |\phi_v(f^+)| + |\phi_v(f^-)| \leq \varphi(f^+) + \varphi(f^-) = \int_X f \, d\mu.$$

Da $C_c^0(X)$ dicht in $L^1(\mu)$ ¹⁵ hat ϕ_v eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung als lineares Funktional auf $L^1(\mu)$. Nach Satz 5.7 gibt es eine Funktion $\eta_v \in L^\infty(\mu)$ mit

$$\phi_v(f) = \int_X f \eta_v \, d\mu \quad \text{für alle } f \in L^1(\mu).$$

Wähle für v die Standardvektoren $e_i \in \mathbb{R}^k$ und setze

$$\eta : X \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \eta = \sum_{i=1}^k \eta_{e_i} e_i.$$

Dann folgt für $g \in C_c^0(X, \mathbb{R}^k)$

$$\phi(g) = \sum_{i=1}^k \phi_{e_i}(g_i) = \sum_{i=1}^k \int_X g_i \eta_{e_i} \, d\mu = \int_X \langle g, \eta \rangle \, d\mu.$$

Wir zeigen noch $|\eta| = 1$ μ -fast-überall: betrachte $\tilde{\mu} = \mu_\perp |\eta|$ und

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x)/|\eta(x)| & \text{falls } \eta(x) \neq 0, \\ 0 & \text{falls } \eta(x) = 0. \end{cases}$$

¹⁵Aufgabe 1, Serie 9

Es folgt $|\tilde{\eta}(x)| = 1$ für $\tilde{\mu}$ -fast-alle $x \in X$, und

$$\phi(g) = \int_X \langle g, \eta \rangle d\mu = \int_X \langle g, \tilde{\eta} \rangle |\eta| d\mu = \int_X \langle g, \tilde{\eta} \rangle d\tilde{\mu}.$$

Das Paar $\tilde{\mu}, \tilde{\eta}$ hat also die gewünschte Darstellungseigenschaft, womit die Existenz bewiesen ist. \square

Jetzt tragen wir den Beweis des Satzes von Lusin nach. Dazu verwenden wir das

Lemma 6.2 (von Tietze) *Sei (X, d) metrischer Raum. Ist $C \subset X$ abgeschlossen und $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^0(X)$ mit $\|\tilde{f}\|_{C^0(X)} = \sup_{x \in C} |f(x)|$.*

BEWEIS: OBdA $1 \leq f \leq 2$, sonst betrachte $2 + \frac{2}{\pi} \arctan f$. Definiere die Fortsetzung durch

$$\tilde{f}(x) = \inf_{y \in C} f(y) \frac{d(x, y)}{d(x, C)} \quad \text{falls } x \in X \setminus C, \text{ bzw. äquivalent } d(x, C) > 0.$$

Dann ist $\inf f \leq \tilde{f} \leq \sup f$: die untere Abschätzung folgt aus $d(x, y)/d(x, C) \leq 1$, die obere Abschätzung ergibt sich durch Wahl von $y \in C$ mit $d(x, y) < (1 + \varepsilon)d(x, C)$. Wir zeigen die Stetigkeit erst im Fall $x_0 \in \partial C$. Sei $x \in B_\delta(x_0) \setminus C$ und $y \in C$ mit $d(x, y) < (1 + \alpha)d(x, C)$; dabei sei $\alpha \in (0, 1]$. Dann gilt

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + (1 + \alpha)d(x, C) < (2 + \alpha)d(x_0, x) \leq 3\delta.$$

Mit $\varepsilon(\delta) = \sup_{|y-x_0| \leq \delta} |f(y) - f(x_0)|$ folgt die Abschätzung

$$f(x_0) - \varepsilon(3\delta) \leq f(y) \frac{d(x, y)}{d(x, C)} \leq (1 + \alpha)f(x_0) + 2\varepsilon(3\delta).$$

Für $d(x, y) \geq 2d(x, C)$ haben wir die triviale Abschätzung

$$f(y) \frac{d(x, y)}{d(x, C)} \geq 2 \inf f \geq f(x_0).$$

Mit $\alpha = 1$ ergibt sich insgesamt die untere Abschätzung

$$\tilde{f}(x) \geq f(x_0) - \varepsilon(3\delta) \rightarrow f(x_0) \quad \text{mit } \delta \searrow 0.$$

Andererseits gibt es zu jedem $\alpha > 0$ Punkte $y \in C$ mit $d(x, y) < (1 + \alpha)d(x, C)$, und mit $\alpha \searrow 0$ folgt die obere Abschätzung

$$\tilde{f}(x) \leq f(x_0) + 2\varepsilon(3\delta) \rightarrow f(x_0) \quad \text{mit } \delta \searrow 0.$$

Auf $X \setminus C$ folgt die Stetigkeit leicht mit der Dreiecksungleichung: Wegen $1 \leq f \leq 2$ gilt

$$\inf_{y \in C} f(y)d(x_1, y) \leq \inf_{y \in C} f(y)d(x_2, y) + 2d(x_1, x_2).$$

Also ist $\inf_{y \in C} f(y)d(x, y)$ (Lipschitz-)stetig auf $X \setminus C$. Dasselbe gilt für $d(x, C)$, somit ist \tilde{f} als Quotient von stetigen Funktionen stetig auf $X \setminus C$. \square

BEWEIS: (von Satz 6.5) Betrachte die Mengen

$$A_{j,k} = \left\{ x \in A : \frac{k}{j} \leq f(x) < \frac{k+1}{j} \right\} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Da $\mu \ll A$ Radonmaß, gibt es zu $\varepsilon > 0$ kompakte Mengen $K_{j,k} \subset A_{j,k}$ mit $\mu(A_{j,k} \setminus K_{j,k}) < 2^{-j-|k|}\varepsilon/3$. Es folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{k=-N}^N K_{j,k} \right) = \mu \left(A \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} K_{j,k} \right) < \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j-|k|}\varepsilon/3 = 2^{-j}\varepsilon.$$

Für hinreichend großes $N_j \in \mathbb{N}$ gilt dann mit $K_j = \bigcup_{k=-N_j}^{N_j} K_{j,k}$ auch $\mu(K_j) < 2^{-j}\varepsilon$. Für $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ folgt

$$\mu(A \setminus K) \leq \mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \setminus K_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \setminus K_j) < \varepsilon.$$

Betrachte nun die Funktionen $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_j(x) = \frac{j}{k}$ für $x \in A_{j,k}$. Aus Kompaktheitsgründen haben die $K_{j,k} \subset A_{j,k}$ positiven Abstand, somit ist f_j lokal konstant (insbesondere stetig) auf $K_j \supset K$. Aber $|f(x) - f_j(x)| \leq \frac{1}{j} \rightarrow 0$ mit $j \rightarrow \infty$. Als gleichmäßiger Grenzwert ist damit $f|_K$ stetig. Mit der Fortsetzung nach Lemma 6.2 folgt nun die Behauptung. \square

7 Schwache Konvergenz

Betrachte eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im Folgenraum $\ell^p(\mathbb{R})$ mit $\|x_k\|_p \leq 1$ für alle k . Wie schon festgestellt, existiert im allgemeinen keine Teilfolge, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ konvergiert. Das bekannte Beispiel ist die Folge $x_k^i = \delta_{ik}$, mit $\|x_k - x_l\|_p = 2^{1/p}$ für $k \neq l$. Andererseits ist jede Folge $(x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt, genauer ist $|x_k^i| \leq 1$. Mit einem Diagonalverfahren finden wir dann eine Teilfolge, so dass nach Ummummerierung gilt: $x^i := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i$ existiert für alle $i \in \mathbb{N}$. Es folgt dann

$$\left(\sum_{i=1}^N |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N |x_k^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_p.$$

Mit $x = (x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt also $\|x\|_p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_p \leq 1$, insbesondere ist $x \in \ell^p(\mathbb{R})$. Obwohl die Folge in $\ell^p(\mathbb{R})$ im allgemeinen nicht konvergiert, erhalten wir einen geeigneten Grenzwert mittels koordinatenweise Konvergenz. Das Konzept des schwachen Grenzwerts verallgemeinert diese Situation.

Definition 7.1 (schwache Grenzwerte) Sei X ein Banachraum.

(1) Die Folge $x_k \in X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$ ($x_k \rightharpoonup x$), falls gilt:

$$\phi(x_k) \rightarrow \phi(x) \quad \text{für alle } \phi \in X'.$$

(2) Sei X Dualraum von Y , also $X = Y'$. Die Folge $\varphi_k \in X$ konvergiert schwach* gegen $\varphi \in X$ ($\varphi_k \xrightarrow{*} \varphi$), genau wenn $\varphi_k(y) \rightarrow \varphi(y)$ für alle $y \in Y$.

Schwach* Konvergenz ist einfach punktweise Konvergenz der (linearen) Funktionen $\varphi_k : Y \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 7.1 Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$$(7.19) \quad f_k \rightarrow f \text{ schwach in } L^p(\mu) \Leftrightarrow \int_X f_k g d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Dies folgt aus der L^p - L^q -Dualität, siehe Satz 5.7. Im Fall $p = 1$ muss vorausgesetzt werden, dass μ σ -endlich ist.

Beispiel 7.2 Sei $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$$(7.20) \quad f_k \rightarrow f \text{ schwach* in } L^p(\mu) \Leftrightarrow \int_X f_k g d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Dies folgt wieder aus der L^p - L^q -Dualität, siehe Satz 5.7. Im Fall $p = \infty$ muss vorausgesetzt werden, dass μ σ -endlich ist. Im Fall $1 < p < \infty$ stimmen die schwache und die schwach*-Konvergenz also überein.

Beispiel 7.3 Sei (X, d) metrischer Raum mit kompakten Abstandskugeln. Für lineare Funktionale auf $C_c^0(X)$ ist dann die schwach*-Konvergenz definiert:

$$\phi_k \rightarrow \phi \text{ schwach* in } C_c^0(X)' \Leftrightarrow \phi_k(f) \rightarrow \phi(f) \text{ für alle } f \in C_c^0(X).$$

Sind μ_k, μ Radonmaße auf X , so können sie als (nichtnegative) lineare Funktionale auf $C_c^0(X)$ aufgefasst werden. Damit ergibt sich folgender Konvergenzbegriff:

$$(7.21) \quad \mu_k \rightarrow \mu \text{ schwach} \Leftrightarrow \int_X f d\mu_k \rightarrow \int_X f d\mu \quad \text{für alle } f \in C_c^0(X).$$

Die Bezeichnungen sind nicht einheitlich, in der Wahrscheinlichkeitstheorie wird dies als *vage Konvergenz* bezeichnet. Man spricht auch von Konvergenz im Sinne von Radonmaßen.

Satz 7.1 (schwache Konvergenz von Radonmaßen) Sei (X, d) metrischer Raum mit (6.14). Für Radonmaße μ_k, μ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\mu_k \rightarrow \mu$ schwach als Radonmaße
- (2) $\mu(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U)$ für alle $U \subset X$ offen,
 $\mu(K) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K)$ für alle $K \subset X$ kompakt.
- (3) $\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B)$ für jede beschränkte Borelmenge B mit $\mu(\partial B) = 0$.

BEWEIS: (1) \Rightarrow (2): Sei U offen. Für $K \subset U$ kompakt und $\chi \in C_c^0(X)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ auf K , $\text{spt } \chi \subset U$ gilt

$$\mu(K) \leq \int_X \chi d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \chi d\mu_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U).$$

Das Supremum über K liefert $\mu(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U)$ nach Folgerung 6.1. Sei K kompakt. Für $U \supset K$ offen und $\chi \in C_c^0(X)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ auf K , $\text{spt } \chi \subset U$ gilt

$$\mu(U) \geq \int_X \chi d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \chi d\mu_k \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K).$$

Das Infimum über U ergibt $\mu(K) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K)$.

(2) \Rightarrow (3): Dies folgt direkt aus der Zeile

$$\mu(B) = \mu(\text{int } B) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\text{int } B) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\overline{B}) \leq \mu(\overline{B}) = \mu(B).$$

(3) \Rightarrow (1): Wegen $f = f^+ - f^-$ reicht es aus, die Aussage für $f \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+)$ zu zeigen. Wähle $R > 0$ mit $\text{spt } f \subset B_R(0)$ und $\mu(\partial B_R(0)) = 0$. Seien weiter $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$ mit $t_N > \|f\|_{C^0}$, $|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon$ und $\mu(\{t_i\}) = 0$ für $i = 1, \dots, N$. Setze $B_i = f^{-1}((t_{i-1}, t_i])$ für $i = 1, \dots, N$, insbesondere $\mu(\partial B_i) = 0$ für $i = 2, \dots, N$. Es gilt nun

$$\sum_{i=2}^N t_{i-1} \chi_{B_i} \leq f \leq t_1 \chi_{B_R(0)} + \sum_{i=2}^N t_i \chi_{B_i},$$

also nach Integration bezüglich μ_k

$$\sum_{i=2}^N t_{i-1} \mu_k(B_i) \leq \int_X f d\mu_k \leq \sum_{i=2}^N t_i \mu_k(B_i) + t_1 \mu_k(B_R(0)).$$

Daraus ergeben sich mit (3) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu_k &\leq \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) + t_1 \mu(B_R(0)) \\ &\leq \sum_{i=2}^N t_{i-1} \mu(B_i) + 2\varepsilon \mu(B_R(0)) \\ &\leq \int f d\mu + 2\varepsilon \mu(B_R(0)), \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu_k &\geq \sum_{i=2}^N t_{i-1} \mu(B_i) \\ &\geq \sum_{i=2}^N t_i \mu(B_i) + t_1 \mu(B_R(0)) - 2\varepsilon \mu(B_R(0)) \\ &\geq \int f d\mu - 2\varepsilon \mu(B_R(0)). \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt (1). □

Wir kommen nun zu allgemeinen Eigenschaften der schwachen Konvergenz; folgende Tatsache wird benötigt.

Lemma 7.1 *Sei X normierter Raum. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$J : X \rightarrow X'', \quad Jx(\phi) = \phi(x) \quad \text{für alle } \phi \in X',$$

eine isometrische Einbettung.

BEWEIS: Trivialerweise gilt

$$\|Jx\|_{X''} = \sup_{\|\phi\|_{X'} \leq 1} |Jx(\phi)| = \sup_{\|\phi\|_{X'} \leq 1} |\phi(x)| \leq \|x\|_X.$$

Andererseits gibt es zu $x \in X$, nach Folgerung 3.2(1), ein $\phi \in X'$ mit $\|\phi\|_{X'} = 1$ und $\phi(x) = \|x\|$. Das bedeutet

$$\|Jx\|_{X''} \geq |Jx(\phi)| = |\phi(x)| = \|x\|_X.$$

□

Satz 7.2 (Grundtatsachen zur schwachen Konvergenz) *Es gilt:*

- (1) *Schwache bzw. schwach* Grenzwerte sind eindeutig bestimmt.*
- (2) *Schwache bzw. schwach*-konvergente Folgen sind beschränkt.*
- (3) *Unterhalbstetigkeit der Normen:*

$$\begin{aligned} x_k \rightarrow x \text{ schwach} &\Rightarrow \|x\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|. \\ \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ schwach*} &\Rightarrow \|\varphi\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|. \end{aligned}$$

BEWEIS: Angenommen $x_k \rightarrow x$ sowie $x_k \rightarrow y$ schwach in X . Dann gilt für jedes $\phi \in X'$

$$\phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = 0.$$

Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.2(2), folgt $x = y$. Für schwach* Grenzwerte ist die Eindeutigkeit trivial.

Die Beschränktheit von schwach* konvergenten Folgen in $X = Y'$ wurde schon in Folgerung 4.1 mit Banach-Steinhaus gezeigt. Sei nun $x_k \rightarrow x$ schwach in X , und $J : X \rightarrow X''$ die kanonische isometrische Einbettung. Dann gilt für alle $\phi \in X'$

$$Jx(\phi) = \phi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} Jx_k(\phi),$$

also $Jx_k \rightarrow Jx$ schwach* in $X'' = (X')'$. Also ist Jx_k beschränkt in X'' . Da $J : X \rightarrow X''$ isometrisch nach Lemma 7.1, ist die Folge x_k in X beschränkt.

In (3) betrachten wir wieder erst die schwach* Konvergenz $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $X = Y'$. Ist $y \in Y$ mit $\|y\| \leq 1$, so gilt

$$|\varphi(y)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k(y)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|.$$

Mit Supremum über y folgt $\|\varphi\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|$. Sei nun $x_k \rightarrow x$ schwach in X . Wie oben gezeigt, gilt dann $Jx_k \rightarrow Jx$ schwach* in X'' , und mit Lemma 7.1 folgt

$$\|x\| = \|Jx\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Jx_k\| = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|.$$

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

Um die Konvergenz bezüglich der Norm abzugrenzen, wird sie auch als starke Konvergenz bezeichnet. Es gelten folgende weitere Aussagen zur schwachen Konvergenz, die als Übungsaufgabe behandelt werden sollen:

- (4) Aus starker Konvergenz folgt schwache beziehungsweise schwach* Konvergenz.
- (5) Ist $x_k \rightarrow x$ schwach in X und $\phi_k \rightarrow \phi$ stark in X' , so folgt $\phi_k(x_k) \rightarrow \phi(x)$.
Ist $\varphi_k \rightarrow \varphi$ schwach* in $X = Y'$ und $y_k \rightarrow y$ stark in Y , so folgt $\varphi_k(x_k) \rightarrow \varphi(x)$.
- (6) Ist $x_k \rightarrow x$ schwach in X und $T \in L(X, Y)$, so folgt $Tx_k \rightarrow Tx$ schwach in Y .

Ein zentraler Punkt bei der schwachen Konvergenz ist folgende Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Satz 7.3 (schwach* Folgenkompaktheit) *Sei Y ein separabler Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge φ_k in Y' eine Teilfolge, die schwach* gegen ein $\varphi \in Y'$ konvergiert.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist $C := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\| < \infty$, und es gibt eine dichte Teilmenge $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$. Es gilt also

$$|\varphi_k(y_n)| \leq C \|y_n\| \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}.$$

Durch sukzessive Wahl von Teilfolgen und Übergang zur Diagonalfolge folgt

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(y_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $Y_0 = \text{Span} \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, das heißt jedes $y \in Y_0$ hat eine Darstellung $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$, mit $\alpha_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\varphi : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(y).$$

Dann ist φ wohldefiniert und linear, und es folgt

$$|\varphi(y)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k(y)| \leq C \|y\| \quad \text{für alle } y \in Y_0.$$

Damit ist φ Lipschitzstetig auf der dichten Teilmenge Y_0 , also fortsetzbar zu einem linearen Funktional $\varphi \in Y'$ mit $\|\varphi\| \leq C$. Für $y \in Y$ und $y_0 \in Y_0$ liefert die Dreiecksungleichung

$$\|\varphi(y) - \varphi_k(y)\| \leq \|\varphi(y) - \varphi(y_0)\| + \|\varphi(y_0) - \varphi_k(y_0)\| + \|\varphi_k(y_0) - \varphi_k(y)\|,$$

und hieraus mit $k \rightarrow \infty$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\varphi(y) - \varphi_k(y)\| \leq 2C \|y - y_0\|.$$

Da Y_0 dicht in Y , folgt $\varphi_k(y) \rightarrow \varphi(y)$ für alle $y \in Y$, das heißt $\varphi_k \rightarrow \varphi$ schwach* in Y' . \square

Wir wollen einen entsprechenden Satz für die schwache Konvergenz folgern. Dazu folgende

Definition 7.2 *Ein Banachraum X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung*

$$J : X \rightarrow X'', Jx(\phi) = \phi(x),$$

surjektiv ist.

Lemma 7.2 *Ist X reflexiver Banachraum, so ist jeder abgeschlossene Unterraum $X_0 \subset X$ ebenfalls reflexiv.*

BEWEIS: Sei $\lambda \in X_0''$ gegeben. Definiere die Fortsetzung

$$\Lambda : X' \rightarrow \mathbb{R}, \Lambda(\phi) = \lambda(\phi|_{X_0}).$$

Es folgt

$$|\Lambda(\phi)| \leq \|\lambda\| \|\phi|_{X_0}\| \leq \|\lambda\| \|\phi\|,$$

also gilt $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$ und insbesondere $\Lambda \in X''$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in X$ mit $\Lambda = J_X x$. Angenommen es ist $x \notin X_0$, also nach Voraussetzung $\text{dist}(x, X_0) > 0$. Nach Hahn-Banach, Folgerung 3.1, gibt es dann ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_{X_0} = 0$ und $\phi(x) \neq 0$. Dann ist

$$0 = \lambda(\phi|_{X_0}) = \Lambda(\phi) = (J_X x)(\phi) = \phi(x) \neq 0,$$

ein Widerspruch. Somit gilt $x \in X_0$. Zu $\varphi \in X_0'$ existiert, wieder nach Hahn-Banach Satz 3.1, ein $\phi \in X'$ mit $\phi|_{X_0} = \varphi$. Es folgt dann

$$(J_{X_0} x)(\varphi) = \varphi(x) = \phi(x) = (J_X x)(\phi) = \Lambda(\phi) = \lambda(\varphi),$$

das heißt $\lambda = J_{X_0} x$ wie verlangt. □

Satz 7.4 (schwache Folgenkompaktheit) *Sei X reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.*

BEWEIS: Sei $\|x_k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$X_0 = \overline{\text{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Dann ist X_0 separabel sowie nach Lemma 7.2 reflexiv, also $J_{X_0} : X_0 \rightarrow X_0''$ surjektive Isometrie. Somit ist auch X_0'' separabel, und dann nach Folgerung 3.5 auch X_0' separabel. Damit ist Satz 7.3 auf die Folge $J_{X_0} x_k \in X_0''$ anwendbar: da J_{X_0} surjektiv, gibt es ein $x \in X_0$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:

$$\varphi(x_k) = (J_{X_0} x_k)(\varphi) \rightarrow (J_{X_0} x)(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{für alle } \varphi \in X_0'.$$

Sei nun $\phi \in X'$. Dann folgt

$$\phi(x_k) = \phi|_{X_0}(x_k) \rightarrow \phi|_{X_0}(x) = \phi(x).$$

Also gilt $x_k \rightarrow x$ schwach in X . □

Wir wollen die abstrakten Kompaktheitssätze nun konkretisieren.

Satz 7.5 (schwache Kompaktheit in $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$) *Sei μ ein Maß auf X und $1 < p < \infty$. Dann besitzt jede beschränkte Folge $f_k \in L^p(\mu)$ eine schwach konvergente Teilfolge, das heißt nach Übergang zur Teilfolge gilt*

$$\int_X f_k g \, d\mu \rightarrow \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

BEWEIS: Wir zeigen dass $L^p(\mu)$ reflexiv ist, die Behauptung folgt dann mit Satz 7.4. Sei $\phi \in L^p(\mu)''$ gegeben, das heißt $\phi : L^p(\mu)' \rightarrow \mathbb{R}$ ist lineares Funktional. Ist $\Lambda_q : L^q(\mu) \rightarrow L^p(\mu)'$ die Dualitätsabbildung, so ist $\phi \circ \Lambda_q \in L^q(\mu)'$. Nach Satz 5.7 gibt es ein $f \in L^p(\mu)$ mit

$$(\phi \circ \Lambda_q)(g) = \int_X fg d\mu \quad \text{für alle } g \in L^q(\mu).$$

Sei nun $J_p : L^p(\mu) \rightarrow L^p(\mu)''$ die kanonische Einbettung. Dann folgt

$$(J_p f)(\Lambda_q g) = (\Lambda_q g)(f) = \int_X fg d\mu = (\phi \circ \Lambda_q)(g) = \phi(\Lambda_q g).$$

Da $\Lambda_q : L^q(\mu) \rightarrow L^p(\mu)'$ surjektiv ist, folgt $J_p f = \phi$ wie verlangt. \square

Für die weiteren Kompaktheitssätze brauchen wir Aussagen zur Separabilität.

Lemma 7.3 (zur Separabilität) *Sei (X, d) metrischer Raum mit (6.14). Dann gelten folgende Aussagen:*

- (1) $C_c^0(X)$ ist separabel.
- (2) Ist μ Radonmaß auf X , so ist $L^p(\mu)$ separabel für $1 \leq p < \infty$.

BEWEIS: Wir zeigen (1). Wähle zu $B_R(x_0)$ und $\delta > 0$ Funktionen $\chi_i \in C_c^0(X)$, $1 \leq i \leq N$, mit folgenden Eigenschaften:

- $\text{spt } \chi_i \subset B_\delta(x_i)$ für ein $x_i \in \overline{B_R(x_0)}$
- $0 \leq \chi_i \leq 1$
- $\sum_{i=1}^N \chi_i = 1$ auf $\overline{B_R(x_0)}$.

Eine solche Teilung der Eins wurde in Kapitel 6 (vor Satz 6.4) konstruiert. Sei nun $f \in C_c^0(X)$ mit $\text{spt } f \subset B_{R-\delta}(x_0)$. Für $x \in B_R(x_0)$ haben wir

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{i=1}^N f(x_i) \chi_i(x) \right| &= \left| \sum_{i=1}^N (f(x) - f_i(x)) \chi_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N |f(x) - f_i(x)| \chi_i(x) \\ &\leq \text{osc}(f, 2\delta) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \delta \searrow 0. \end{aligned}$$

Ist $x \notin B_R(x_0)$ und $\chi_i(x) \neq 0$, so folgt $d(x_0, x_i) \geq d(x_0, x) - d(x_i, x) > R - \delta$, also

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) \chi_i(x) = 0 = f(x).$$

Mit $\delta_k = \frac{1}{k}$ können wir alle Funktionen $f \in C_c^0(X)$ mit $\text{spt } f \subset B_R(x_0)$ gleichmäßig durch Linearkombinationen solcher $\chi_{i,k}$ approximieren. Das liefert eine abzählbare dichte Teilmenge, wenn wir nur Linearkombinationen mit Koeffizienten in \mathbb{Q} betrachten. Schließlich schöpfen wir mit $R_k = k$ den Raum X aus.

Nach Serie 9, Aufgabe 1, ist $C_c^0(X)$ dicht in $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Das Lemma folgt. \square

Satz 7.6 (schwach*-Kompaktheit in $L^\infty(\mu)$) Sei (X, d) metrischer Raum mit (6.14), und μ sei Radonmaß auf X . Dann besitzt jede beschränkte Folge $f_k \in L^\infty(\mu)$ eine schwach*-konvergente Teilfolge, das heißt nach Übergang zur Teilfolge gilt

$$\int_X f_k g \, d\mu \rightarrow \int_X f g \, d\mu \quad \text{für alle } g \in L^1(\mu).$$

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist μ σ -endlich, also gilt $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)'$ nach Satz 5.7. Außerdem ist $L^1(\mu)$ separabel nach Lemma 7.3. Die Behauptung folgt also aus Satz 7.3. \square

Für $L^1(\mu)$ haben wir leider keinen Kompaktheitsatz. Im allgemeinen ist nämlich

$$L^\infty(\mu)' \supsetneq L^1(\mu),$$

siehe Beispiel 5.3. Damit ist $L^1(\mu)$ auch nicht reflexiv, und weder Satz 7.3 noch Satz 7.4 ist anwendbar. Stattdessen gilt aber folgende Aussage.

Satz 7.7 (Kompaktheitssatz für Radonmaße) Sei (X, d) metrischer Raum mit (6.14), und $\mu_k, k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Radonmaßen auf X mit

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(K) < \infty \quad \text{für alle } K \subset X \text{ kompakt.}$$

Dann gibt es ein Radonmaß μ auf X , so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:

$$\mu_k \rightarrow \mu \text{ schwach (im Sinne von Radonmaßen).}$$

BEWEIS: Wir nehmen an, dass X kompakt ist, andernfalls betrachte Ausschöpfung durch relativ kompakte Kugeln. Der Raum $C^0(X)$ ist separabel. Nun gilt

$$\sup \left\{ \int_X f \, d\mu_k : f \in C^0(X), |f| \leq 1 \right\} = \mu_k(X) \leq C,$$

das heißt die Folge μ_k ist in $C^0(X)'$ beschränkt. Nach Satz 7.3 gibt es ein $\phi \in C^0(X)'$ mit

$$\phi(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f \, d\mu_k \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Insbesondere ist $|\phi(f)| \leq C \|f\|_{C^0(X)}$ und $\phi(f) \geq 0$ für $f \in C_c^0(X, \mathbb{R}_0^+)$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt dann es ein Radonmaß μ auf X mit

$$\phi(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{für alle } f \in C^0(X).$$

Dies folgt aus dem Satz von Riesz, Satz 6.4. Man erhält eine Darstellung mit einer Vorzeichenfunktion $\eta : X \rightarrow \{\pm 1\}$; da das Funktional aber nichtnegativ ist, gilt $\eta = 1$ μ -fast-überall (Übungsaufgabe). \square

Wir haben die schwachen Konvergenzbegriffe mittels Folgen definiert, ohne etwa den Begriff von offenen Umgebungen zu verwenden. Es kann eine schwache sowie eine schwach* Topologie erklärt werden, so dass Konvergenz bezüglich dieser Topologien unsere Definitionen ergibt. Bei der Diskussion der Kompaktheit ist aber Vorsicht geboten, denn Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit sind für schwache Topologien nicht immer äquivalent. In den Anwendungen ist die von uns gezeigte Folgenkompaktheit wichtig. Für mehr zur schwachen Topologie siehe [3].

8 Hilbertraumtheorie

Definition 8.1 Ein Skalarproduktraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ über \mathbb{R} heißt Hilbertraum, wenn er bezüglich der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist.

Ein Beispiel ist natürlich der Raum $L^2(\mu)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mu)} = \int_X fg \, d\mu$$

Weiter unten werden wir als weiteres Beispiel den Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ kennen lernen. In vielen Anwendungen spielen komplexe Hilberträume eine Rolle, zum Beispiel in der Quantenmechanik. Die Unterschiede zum reellen Fall sind aber nicht so groß, soweit es unsere Analysis betrifft, aus Zeitgründen bleiben wir deshalb im Reellen.

Satz 8.1 (Darstellungssatz von Riesz) Sei X Hilbertraum über \mathbb{R} . Dann ist

$$\Lambda : X \rightarrow X', \quad \Lambda x(y) = \langle x, y \rangle,$$

eine surjektive, lineare Isometrie.

Zusatz. Für $\phi \in X'$ ist $x_0 = \Lambda^{-1}(\phi)$ die eindeutig bestimmte Minimalstelle des Funktionals

$$Q_\phi : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_\phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \phi(x).$$

BEWEIS: Für $x \neq 0$, $\|y\| \leq 1$ gilt nach Cauchy-Schwarz

$$|\Lambda x(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|, \quad \text{Gleichheit für } y = \frac{x}{\|x\|}.$$

Also ist $\|\Lambda x\| = \|x\|$, das heißt Λ ist isometrisch. Es reicht nun aus, die Existenz einer Minimalstelle x_0 von Q_ϕ zu zeigen, denn dann gilt für alle $y \in X$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} Q_\phi(x_0 + \varepsilon y)|_{\varepsilon=0} = \langle x_0, y \rangle - \phi(y), \quad \text{also } \phi = \Lambda(x_0).$$

Dies zeigt die Surjektivität von Λ und gleichzeitig die Eindeutigkeit der Minimalstelle. Die Funktion Q_ϕ ist jedenfalls nach unten beschränkt, und zwar gilt für alle $x \in X$

$$Q_\phi(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \|\phi\| \|x\| = \frac{1}{2}(\|x\| - \|\phi\|)^2 - \frac{1}{2}\|\phi\|^2.$$

Es folgt $\lambda := \inf_{x \in X} Q_\phi(x) \geq -\frac{1}{2}\|\phi\|^2 > -\infty$. Wähle nun eine Minimalfolge $x_k \in X$ für Q_ϕ , und berechne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|x_k - x_l\|^2 &= \|x_k\|^2 + \|x_l\|^2 - \frac{1}{2}\|x_k + x_l\|^2 \\ &= 2Q_\phi(x_k) + 2Q_\phi(x_l) - 4Q_\phi\left(\frac{x_k + x_l}{2}\right) \\ &\leq 2Q_\phi(x_k) + 2Q_\phi(x_l) - 4\lambda \\ &< \varepsilon \quad \text{für } k, l \text{ hinreichend groß.} \end{aligned}$$

Somit ist x_k Cauchyfolge in X , und $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ existiert. Es folgt $Q_\phi(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_\phi(x_k) = \lambda$, was zu zeigen war. \square

Folgerung 8.1 *Hilberträume sind reflexiv.*

BEWEIS: Nach Satz 8.1 ist die Norm auf X' Euklidische Norm bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \phi, \psi \rangle_{X'} := \langle \Lambda_X^{-1} \phi, \Lambda_X^{-1} \psi \rangle_X,$$

insbesondere ist X' ebenfalls Hilbertraum. Berechne nun

$$\begin{aligned} \Lambda_{X'}(\Lambda_X x)(\phi) &= \langle \Lambda_X x, \phi \rangle_{X'} \\ &= \langle \Lambda_X^{-1} \Lambda_X x, \Lambda_X^{-1} \phi \rangle_X \\ &= \langle x, \Lambda_X^{-1} \phi \rangle_X \\ &= \Lambda_X(\Lambda_X^{-1} \phi)(x) \\ &= \phi(x) \\ &= J_X x(\phi). \end{aligned}$$

Die kanonische Einbettung $J_X : X \rightarrow X''$ ist daher Verkettung von zwei Isomorphismen, nämlich $J_X = \Lambda_{X'} \circ \Lambda_X$. \square

Definition 8.2 *Sei X Hilbertraum. Das orthogonale Komplement einer Menge $M \subset X$ ist*

$$M^\perp = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in M\}.$$

M^\perp ist stets abgeschlossener Unterraum von X .

Folgerung 8.2 (Projektionssatz) *Ist Y ein abgeschlossener Unterraum von X , so gilt $X = Y \oplus Y^\perp$.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist Y mit dem induzierten Skalarprodukt selbst ein Hilbertraum. Für $x \in X$ betrachte $\phi \in Y'$, $\phi(y) = \langle x, y \rangle$. Nach Satz 8.1 gibt es ein $y_0 \in Y$ mit

$$\phi(y) = \langle y_0, y \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x - y_0, y \rangle = 0 \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Also ist $x = y_0 + (x - y_0) \in Y \oplus Y^\perp$. \square

Bemerkung. Für beliebige $y \in Y$ haben wir

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2,$$

das heißt y_0 ist der eindeutige nächste Punkt zu x in Y . Mit $y = 0$ folgt $\|y_0\| \leq \|x\|$, insbesondere hat die Projektion auf Y die Norm Eins (außer wenn $Y = \{0\}$).

Folgerung 8.3 (Hilbertraumadjungierte) *Seien X, Y Hilberträume über \mathbb{R} . Zu $T \in L(X, Y)$ gibt es dann genau ein $T^* \in L(Y, X)$ mit*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y.$$

BEWEIS: Die Eindeutigkeit ist klar. Betrachte die transponierte Abbildung (Banachraum-Adjungierte) $T' : Y' \rightarrow X'$, $T'\psi(x) = \psi(Tx)$, und setze $T^* = \Lambda_X^{-1} T' \Lambda_Y$. Es folgt

$$\langle x, T^*y \rangle_X = \langle x, \Lambda_X^{-1} T' \Lambda_Y y \rangle_X = T' \Lambda_Y y(x) = \Lambda_Y y(Tx) = \langle Tx, y \rangle.$$

□

Eine zentrale Anwendung der Hilbertraum-Theorie ist die Lösung elliptischer Randwertprobleme. Die Methode liefert zunächst verallgemeinerte Lösungen, die nicht klassisch differenzierbar sind. Wir wollen als erstes das zugrundeliegende Konzept der schwachen Ableitung und der Sobolevräume vorstellen, und kommen im Anschluss auf die Randwertprobleme zu sprechen.

Definition 8.3 (schwache Ableitung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt schwache Ableitung von $u(x)$ nach der Variablen x_i , falls gilt:

$$\int_{\Omega} u \partial_i \varphi = - \int_{\Omega} g \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Notation: $\partial_i u = g$ schwach.

Wir machen zwei Bemerkungen:

- (1) *Eindeutigkeit:* Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt, falls existent. Denn ist die Definition für g_1 und g_2 erfüllt, so folgt

$$\int_{\Omega} (g_1 - g_2) \varphi = - \left(\int_{\Omega} u \partial_i \varphi - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi \right) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt $g_1 \equiv g_2$. Ist $u \in C^1(\Omega)$, so ist u auch schwach differenzierbar, die schwachen Ableitungen $\partial_i u$ sind die klassischen Ableitungen.

- (2) *Linearität:* Sind $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwach nach x_i differenzierbar, so auch $\alpha u + \beta v$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; und zwar gilt $\partial_i(\alpha u + \beta v) = \alpha \partial_i u + \beta \partial_i v$. Denn wir berechnen für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha u + \beta v) \partial_i \varphi &= \alpha \int_{\Omega} u \partial_i \varphi + \beta \int_{\Omega} v \partial_i \varphi \\ &= -\alpha \int_{\Omega} (\partial_i u) \varphi - \beta \int_{\Omega} (\partial_i v) \varphi \\ &= - \int_{\Omega} (\alpha \partial_i u + \beta \partial_i v) \varphi. \end{aligned}$$

Beispiel 8.1 Wir geben ein Beispiel einer schwach, aber nicht klassisch differenzierbaren Funktion, und zwar betrachten wir für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), u(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat $u(x)$ schwache Ableitungen auf \mathbb{R}^n ? Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ muss die schwache Ableitung mit der klassischen Ableitung übereinstimmen, diese lautet

$$\partial_i u(x) = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x_i}{|x|} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Für $\alpha > 1 - n$ sind die g_i auf \mathbb{R}^n lokal integrierbar. Wir vermuten daher, dass $u(x)$ genau für $\alpha > 1 - n$ schwach differenzierbar ist auf \mathbb{R}^n . Sei dazu $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u \partial_i \varphi &= \lim_{\varrho \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} u \partial_i \varphi \\ &= \lim_{\varrho \searrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \partial_i(u\varphi) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} g_i \varphi \right) \\ &= \lim_{\varrho \searrow 0} \left(- \underbrace{\int_{\partial B_\varrho(0)} u \varphi \frac{x_i}{\varrho} d\mu}_{\leq C \varrho^{n-1+\alpha}} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} g_i \varphi \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} g_i \varphi. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Konvergenzsatz von Lebesgue benutzt. Es gilt also tatsächlich $\partial_i u = g_i$ für $\alpha > 1 - n$.

Definition 8.4 (Sobolevräume) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Wir definieren

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega) \text{ für } i = 1, \dots, n\},$$

mit der zugehörigen $W^{1,p}$ -Norm

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Analog werden auch die lokalen Sobolevräume $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ erklärt.

Satz 8.2 $W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.

BEWEIS: Ist u_k eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$, so sind u_k sowie $\partial_i u_k$ Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$. Nach Fischer-Riesz gilt dann $u_k \rightarrow u$, $\partial_i u_k \rightarrow g_i$ in $L^p(\Omega)$. Für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ folgt

$$\int_{\Omega} u \partial_i \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k \partial_i \varphi = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\partial_i u_k) \varphi = \int_{\Omega} g_i \varphi.$$

Also gilt $\partial_i u = g_i$ schwach, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. \square

Es ist eine wichtige Tatsache, dass Sobolevfunktionen im Fall $p < \infty$ durch glatte Funktionen approximiert werden können. Wir erinnern kurz an das Verfahren der Glättung. Fixiere einen Glättungskern $\eta \in C_c^\infty(B_1(0))$, $\eta \geq 0$, mit $\int \eta(x) dx = 1$. Reskaliere mit $\eta^\varrho(x) = \varrho^{-n} \eta(\frac{x}{\varrho})$, und definiere für $u \in L^p(\Omega)$

$$(\eta_\varrho * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta^\varrho(x-y) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) u(x - \varrho z) dz \quad \text{für } x \in \Omega_\varrho.$$

Dabei ist $\Omega_\varrho = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varrho\}$. Für $x \in \Omega_\varrho$ und $|z| \leq 1$ ist dann $x - \varrho z \in \Omega$. Damit das Integral formal definiert ist, setzen wir $u(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, das Faltungsintegral hängt aber nicht von der Wahl der Fortsetzung ab. Für $u \in L_{loc}^p(\Omega)$, $p < \infty$, konvergiert $\eta^\varrho * u$ lokal (i.e. auf kompakten Teilmengen von Ω) in L^p gegen u . Ist sogar $u \in C^0(\Omega)$, so ist die Konvergenz lokal gleichmäßig. Die L_{loc}^p -Konvergenz folgt dann aus der Dichtheit der stetigen Funktionen.

Lemma 8.1 (Glättung von Sobolevfunktionen) Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gelten folgende Aussagen:

- (1) $\partial_i(\eta^\varrho * u) = \eta^\varrho * \partial_i u$ auf Ω_ϱ (links steht die klassische Ableitung).
- (2) Für $p < \infty$ gilt $\eta_\varrho * u \rightarrow u$ lokal auf Ω in $W^{1,p}$.

BEWEIS: Aussage (2) folgt aus (1) wegen der oben diskutierten Konvergenz in $L^p_{loc}(\Omega)$. Für (1) berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_i(\eta^\varrho * u)(x) &= \int \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \eta^\varrho(x-y) \right) u(y) dy \\ &= - \int \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \eta^\varrho(x-y) \right) u(y) dy \\ &= \int \eta^\varrho(x-y) \partial_i u(y) dy \\ &= (\eta^\varrho * \partial_i u)(x). \end{aligned}$$

□

Lemma 8.2 (Lokalisierung von Sobolevfunktionen) Seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\eta \in C^1_c(\Omega)$. Dann ist $u\eta \in W^{1,p}(\Omega)$ und es gilt die Produktregel

$$\partial_i(u\eta) = (\partial_i u)\eta + u(\partial_i \eta).$$

BEWEIS: Wir berechnen für $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$

$$\int_\Omega u\eta \partial_i \varphi = \int_\Omega u \partial_i(\eta\varphi) - \int_\Omega u(\partial_i \eta)\varphi = - \int_\Omega [(\partial_i u)\eta + u(\partial_i \eta)]\varphi.$$

Hier wurde benutzt, dass in die Definition der schwachen Ableitung $\partial_i u$ auch $C^1_c(\Omega)$ -Funktionen eingesetzt werden können (nämlich hier $\eta\varphi$). Dies folgt durch Approximation mit C^∞_c -Funktionen durch Glättung. □

Satz 8.3 (Meyers-Serrin) Für $1 \leq p < \infty$ ist der Raum $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty\}$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.

BEWEIS: Betrachte die Ausschöpfung $U_k = \Omega_{1/k} \cap B_k(0)$ für $k \in \mathbb{N}$, und $U_0 := \emptyset$. Dann ist $V_k = U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}}$, $k \in \mathbb{N}$, eine offene, lokal endliche Überdeckung von Ω . Wähle eine untergeordnete Teilung der Eins:¹⁶

$$\chi_k \in C^\infty_c(V_k), \chi_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \equiv 1.$$

Zu $\delta > 0$ gibt es $\varrho_k > 0$, so dass für $u_k = \eta_{\varrho_k} * (\chi_k u)$ gilt:

$$\|u_k - \chi_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2^{-k} \delta \quad \text{und} \quad \text{spt } u_k \subset V_k.$$

Für $v = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ folgt $\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k - \chi_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \delta$. □

¹⁶die Teilung der Eins kann mit gleicher Indexmenge gewählt werden, da V_k relativ kompakt ist

Sei $H^{1,p}(\Omega)$ die Vervollständigung des Raums $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty\}$ bezüglich der $W^{1,p}(\Omega)$ -Norm. Jedes Element von $H^{1,p}(\Omega)$ ist durch eine $W^{1,p}$ -Cauchyfolge von glatten Funktionen repräsentiert, siehe Satz 1.1. Zwei Cauchyfolgen sind äquivalent, wenn ihre Differenz eine $W^{1,p}(\Omega)$ -Nullfolge ist. Da $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig ist, erhalten wir eine isometrische Einbettung

$$H^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega), [(u_k)_{k \in \mathbb{N}}] \mapsto W^{1,p}\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} u_k.$$

Nach Satz 8.3 ist diese Einbettung sogar surjektiv, also sind $H^{1,p}(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ isometrisch isomorph. Wir hätten die Sobolevräume für $p < \infty$ somit direkt als Vervollständigung einführen können. Der Umgang mit Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen wäre aber enorm unpraktisch. Bei der Definition der reellen Zahlen kann das vermieden werden, weil eine axiomatische Beschreibung vorliegt; auf diese stützt sich die Analysis-Grundvorlesung. Hier ist es wichtig, die punktweisen Repräsentanten zur Verfügung zu haben. Im übrigen ist die schwache Ableitung ein zentraler Begriff in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Da Sobolev-Funktionen nur fast überall definiert sind, während der Rand $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist, ist die Definition von Randwerten für $W^{1,p}(\Omega)$ -Funktionen keineswegs offensichtlich. Die folgende Definition soll die Funktionen mit Randwerten Null charakterisieren; dass die Definition dies aber tatsächlich leistet, ist gar nicht klar, denn der auftretende Abschluss ist zunächst nicht bekannt. Zum Beispiel wäre der L^2 -Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ einfach nur der Raum $L^2(\Omega)$. Aus Zeitgründen verweisen wir für mehr zur Definition von Randwerten auf das Buch von H.W. Alt [1].

Definition 8.5 *Wir bezeichnen mit $W_0^{1,p}(\Omega)$ den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für gegebene Koeffizienten $a^{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$, betrachten wir den Differentialoperator

$$(8.22) \quad L : C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega), Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij} \partial_i u).$$

Im Spezialfall $a^{ij} = \delta_{ij}$ ist $L = -\Delta$ der (negative) Laplaceoperator. Wir interessieren uns für eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ des Dirichletproblems

$$(8.23) \quad Lu = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Ziel ist die Konstruktion einer schwachen Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Problems. Die Nullrandwerte sind dabei durch die Wahl des Raums realisiert. Doch wie kann Lu sinnvoll definiert werden? Ist $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und damit $Lu \in C^0(\bar{\Omega})$, so ergibt Multiplikation von Lu mit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und partielle Integration

$$\langle Lu, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi.$$

Hier kann Lu einerseits als L^2 -Funktion, andererseits auch als lineares Funktional interpretiert werden. Die rechte Seite ist aber schon für $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert. Wir können sogar $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ zulassen, das heißt wir erhalten den schwach definierten Operator

$$(8.24) \quad L : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)', (Lu)(\varphi) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi.$$

In der Gleichung $Lu = f$ muss die rechte Seite ebenfalls mit φ multipliziert und integriert werden, das heißt sie ist ebenfalls ein lineares Funktional

$$\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)', \quad \phi(\varphi) = \int_{\Omega} f\varphi.$$

Für $f \in L^2(\Omega)$ ist ϕ tatsächlich stetig, denn nach Cauchy-Schwarz ist

$$|\phi(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Die allgemeine Lösbarkeit des Dirichletproblems führt somit auf die Frage:

Ist der schwach definierte Operator $L : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)'$ surjektiv?

Natürlich ist dann noch zu zeigen, dass eine schwache Lösung tatsächlich eine klassische Lösung ist. Die schwache Lösungseigenschaft lautet

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

In der Theorie partieller Differentialgleichungen wird bewiesen, dass eine solche schwache Lösung u bei hinreichend glatten Koeffizienten a^{ij} eine C^2 -Funktion ist. Dann kann man die partielle Integration rückgängig machen, es ergibt sich

$$\int_{\Omega} \left(f + \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a^{ij} \partial_i u) \right) \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt die Differentialgleichung. Der schwach definierte Operator kann wie folgt mit einer Bilinearform geschrieben werden:

$$(Lu)(\varphi) = B(u, \varphi) \quad \text{mit } B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v.$$

Wir brauchen für den Existenzbeweis folgende Tatsache über Bilinearformen.

Lemma 8.3 (Darstellung von Bilinearformen) *Sei X Hilbertraum, und $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetige Bilinearform auf X , das heißt*

$$\|B\| = \sup_{\|u\|, \|v\| \leq 1} |B(u, v)| < \infty.$$

Dann gibt es genau ein $T = T_B \in L(X, X)$ mit

$$B(u, v) = \langle u, Tv \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|B\|$.

BEWEIS: Die Eindeutigkeit von T ist klar. Für die Existenz betrachte, für $v \in X$ fest, das Funktional $B(\cdot, v)$. Erhalte mit Satz 8.1 eine wohldefinierte Abbildung $T : X \rightarrow X$ mit

$$B(u, v) = \langle u, T(v) \rangle \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

Man sieht leicht, dass T linear ist. Mit $u = Tv$ für $\|v\| \leq 1$ folgt

$$\|Tv\|^2 = B(Tv, v) \leq \|B\| \|Tv\|,$$

also $\|T\| \leq \|B\|$. Die Ungleichung $\|B\| \leq \|T\|$ ist offensichtlich. □

Der folgende abstrakte Existenzsatz verallgemeinert den Darstellungssatz von Riesz.

Satz 8.4 (Lax-Milgram) Sei $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf dem Hilbertraum X mit folgenden Eigenschaften.

(1) B ist stetig: es gibt ein $M < \infty$ mit $|B(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$ für alle $u, v \in X$.

(2) B ist koerziv: es gibt ein $\mu > 0$ mit $B(u, u) \geq \mu\|u\|^2$ für alle $u \in X$.

Dann ist der Operator $L : X \rightarrow X'$, $(Lu)(v) = B(u, v)$, invertierbar, und es gilt

$$(8.25) \quad \|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}.$$

Zusatz. Ist B symmetrische Bilinearform, so ist die Lösung $u \in X$ von $Lu = \phi$ die eindeutige Minimalstelle des Funktionals $Q_\phi(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - \phi(v)$.

BEWEIS: Durch Testen mit u folgt aus der Koerzivität

$$\mu\|u\|^2 \leq B(u, u) = Lu(u) \leq \|Lu\| \|u\|,$$

das heißt $\|u\| \leq \frac{1}{\mu}\|Lu\|$. Insbesondere ist L injektiv. Sobald zusätzlich die Surjektivität von L bewiesen ist, folgt außerdem die Abschätzung (8.25).

Ist B symmetrische Bilinearform, so ist $B(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf dem Hilbertraum X mit äquivalenter Norm, genauer gilt

$$\sqrt{\mu}\|u\| \leq \|u\|_B = \sqrt{B(u, u)} \leq \sqrt{M}\|u\| \quad \text{für alle } u \in X.$$

Die Surjektivität von L folgt dann direkt aus Satz 8.1. Im Fall B nicht symmetrisch wähle $T \in L(X, X)$ mit $B(u, v) = \langle u, Tv \rangle$, siehe Lemma 8.3. Es gilt dann

$$\mu\|u\|^2 \leq B(u, u) = \langle u, Tu \rangle \leq \|u\| \|Tu\|,$$

also $\|Tu\| \geq \mu\|u\|$. Betrachte nun die Bilinearform $A(u, v) = \langle Tu, Tv \rangle$. Es gilt $\|A\| \leq \|T\|^2 = \|B\|^2$ nach Lemma 8.3, sowie

$$A(u, u) = \|Tu\|^2 \geq \mu^2\|u\|^2 \quad \text{für alle } u \in X.$$

Wie gezeigt ist $K : X \rightarrow X'$, $(Ku)(v) = A(u, v)$, beschränkt invertierbar. Aber

$$(Ku)(v) = A(u, v) = \langle Tu, Tv \rangle = B(Tu, v) = L(Tu)(v).$$

Dies zeigt $LT = K$, also ist auch L surjektiv. □

Zur Lösung des Dirichletproblems sind nun die Voraussetzungen von Satz 8.4 zu verifizieren. Als erstes zeigen wir, dass B bzw. L stetig definiert sind.

Lemma 8.4 Sei $\sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda < \infty$. Dann ist die Bilinearform

$$B : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(u, v) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v,$$

stetig, genauer gilt $|B(u, v)| \leq \Lambda \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

BEWEIS: Wir schätzen mit Cauchy-Schwarz wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |a^{ij}| |\partial_i u| |\partial_j v| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_j v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Die Koerzivität der Bilinearform B erfordert eine strukturelle Bedingung an die Koeffizienten a^{ij} . Wir brauchen dazu folgende Abschätzung.

Satz 8.5 (Poincaré-Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $d = \text{diam}(\Omega)$. Für $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d \|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

BEWEIS: Wir können $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ annehmen mit $\text{spt } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_n \leq d\}$. Für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, d]$ folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$|u(x', x_n)|^p = \left| \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', z) dz \right|^p \leq d^{p-1} \int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p(x', z) dz.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d |u(x', x_n)|^p dx_n dx' \\
&\leq d^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d \int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p(x', z) dz dx_n dx' \\
&= d^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p(x', z) dz dx' \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |Du(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.5 Sei Ω offen und beschränkt. Der Operator $Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij} \partial_i u)$ sei elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$, das heißt

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist die Bilinearform B auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ koerzitiv, genauer gilt mit $d = \text{diam}(\Omega)$

$$B(u, u) \geq \frac{\lambda}{d^2 + 1} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

BEWEIS: Aus der Poincaré-Ungleichung, Satz 8.5, folgt

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |Du|^2 \leq (d^2 + 1) \int_{\Omega} |Du|^2.$$

Die Voraussetzung der Elliptizität impliziert nun

$$B(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u \geq \lambda \int_{\Omega} |Du|^2 \geq \frac{\lambda}{d^2 + 1} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2.$$

□

Wir erhalten insgesamt folgenden Existenzsatz.

Satz 8.6 (Lösung des Dirichletproblems) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)', \quad Lu(v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j v.$$

Dabei sei $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ elliptisch mit $\lambda > 0$. Dann ist L beschränkt invertierbar, und

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{d^2 + 1}{\lambda} \quad \text{wobei } d = \text{diam}(\Omega).$$

BEWEIS: Wie gezeigt ist $B(u, v) = Lu(v)$ stetig und koerziv mit Konstante $\mu = \frac{\lambda}{d^2 + 1}$. Die Behauptung folgt somit aus Satz 8.4. □

9 Kompakte Operatoren

Definition 9.1 Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X, Y)$ heißt kompakt, wenn gilt: für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hat die Folge $(Kx_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Lemma 9.1 Äquivalente Bedingungen für die Kompaktheit von $K \in L(X, Y)$ sind:

- (1) Für jedes $B \subset X$ beschränkt ist $\overline{K(B)} \subset Y$ kompakt.
- (2) Für jede Folge $x_k \rightarrow x$ schwach in X folgt $Kx_k \rightarrow Kx$ stark in Y (falls X reflexiv).

BEWEIS: Sei K kompakt. Ist B beschränkt und y_k Folge in $\overline{K(B)}$, so gibt es $x_k \in B$ mit $\|y_k - Kx_k\| < \frac{1}{k}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt dann $Kx_k \rightarrow y$. Es folgt $y \in \overline{K(B)}$ und $y_k \rightarrow y$, also ist (1) bewiesen. Sei umgekehrt (1) erfüllt und x_k eine beschränkte Folge in X , also $\|x_k\| \leq R$ für alle K . Da $\overline{K(B_R(0))}$ kompakt, gilt für eine Teilfolge $Kx_k \rightarrow y$. Somit ist K kompakter Operator.

Wir zeigen jetzt: aus K kompakt folgt (2). Sei dazu $x_k \rightarrow x$ schwach in X . Dann ist die Folge x_k beschränkt und es gilt $Kx_k \rightarrow Kx$ schwach in Y (siehe Satz 7.2(2) sowie Aussage (6) nach diesem Satz). Angenommen Kx_k konvergiert nicht stark gegen Kx . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt

$$\|Kx_k - Kx\| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da K kompakt, gilt aber für eine weitere Teilfolge $Kx_{k_j} \rightarrow y$ stark in Y . Da starke Konvergenz schwache Konvergenz impliziert, und der schwache Grenzwert eindeutig ist (Satz 7.2(1)), muss $y = Kx$ sein, ein Widerspruch. Sei schließlich nun (2) erfüllt, und x_k beschränkte Folge in X . Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $x_k \rightarrow x$ schwach in X ; hier brauchen wir die Voraussetzung X reflexiv. Aus (2) folgt dann $Kx_k \rightarrow Kx$ stark in Y , also ist K kompakt. \square

Beispiel 9.1 Jeder Operator $K \in L(X, Y)$ mit endlichdimensionalem Bild ist kompakt.

Beispiel 9.2 Sei X kompakter metrischer Raum und $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. In Satz 2.6 haben wir gezeigt, dass dann die Einbettung $C^{0,\alpha}(X) \subset C^{0,\beta}(X)$ kompakt ist. Sind $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $l + \beta < k + \alpha$, so ist die Einbettung $C^{k,\alpha}(\Omega) \subset C^{l,\beta}(\Omega)$ kompakt, falls Ω offen und beschränkt ist und eine Sehnenbogenbedingung erfüllt. Dies haben wir in Satz 2.8 bewiesen.

Für die Sobolevräume gibt es einen analogen und wichtigen Kompaktheitssatz, den wir aus Zeitgründen leider nur ohne Beweis angeben können:

Satz 9.1 (von Rellich) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist die Inklusion

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

ein kompakter linearer Operator.

Lemma 9.2 Es gilt

- (1) Die Verkettungen stetig \circ kompakt sowie kompakt \circ stetig sind wieder kompakt.
- (2) Ist $K : X \rightarrow Y$ kompakt, so auch $K' : Y' \rightarrow X'$.

BEWEIS: Aussage (1) ist trivial. Für (2) seien $\psi_k \in Y'$ mit $\|\psi_k\| \leq \Lambda < \infty$. Wie oben bemerkt ist die Menge $M = \overline{K(B_1(0))}$ kompakt in Y . Dann ist $\psi_k|_M$ gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig Lipschitz. Nach Arzela-Ascoli, Satz 2.4, ist $\psi_k|_M$ eine Cauchyfolge in $C^0(M)$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Es gilt also für k, l hinreichend groß

$$\|\psi_k \circ K - \psi_l \circ K\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\psi_k(Kx) - \psi_l(Kx)| < \varepsilon.$$

Also ist $K'\psi_k = \psi_k \circ K$ eine Cauchyfolge in X' , konvergiert also in X' . \square

Wir kommen nun zu einer zweiten Klasse von Operatoren, und zwar den Fredholmoperatoren. Diese stehen mit den kompakten Operatoren in Beziehung durch den Satz von Riesz-Schauder, den wir gleich unten beweisen.

Definition 9.2 $L \in L(X, Y)$ heißt Fredholmoperator, falls gilt:

- (1) Bild $L \subset Y$ ist abgeschlossen.
- (2) $\ker L$ und $\operatorname{coker} L = Y/\operatorname{Bild} L$ sind endlichdimensional.

Der Fredholmindex von L ist dann definiert als

$$\operatorname{ind} L = \dim \ker L - \dim \operatorname{coker} L \in \mathbb{Z}.$$

Die beiden Zahlen haben folgende Interpretation:

$\dim \ker L =$ Anzahl der linear unabhängigen Lösungen
der homogenen Gleichung $Lu = 0$.

$\dim \operatorname{coker} L =$ Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen,
damit die inhomogene Gleichung $Lu = f$ lösbar ist.

Im endlichdimensionalen Fall ist der Fredholmindex stets gleich $\dim X - \dim Y$; dies folgt aus der Dimensionsformel. Die Identität und allgemeiner jeder invertierbare Operatorer ist Fredholmoperator vom Index Null. Auf dem Folgenraum $\ell^2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots) &\mapsto (x_2, x_3, \dots) \quad \text{hat Index } 1, \\(x_1, x_2, \dots) &\mapsto (0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{hat Index } -1.\end{aligned}$$

Satz 9.2 (Riesz-Schauder) *Seien X, Y Banachräume. Die Abbildung $L_0 \in L(X, Y)$ habe eine beschränkte Inverse und $K \in L(X, Y)$ sei kompakt. Dann ist $L = L_0 + K$ Fredholmoperator vom Index Null. Insbesondere gilt*

$$L \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ injektiv} .$$

Bemerkung. Die letzte Aussage wird oft so formuliert: entweder die homogene Gleichung $Lu = 0$ hat eine nichttriviale Lösung, oder die inhomogene Gleichung $Lu = f$ ist für alle rechten Seiten f eindeutig lösbar (*Fredholmsche Alternative*).

BEWEIS: Wir können $X = Y$ und $L = \operatorname{Id} + K$ annehmen, andernfalls betrachte $L_0^{-1}L$. Wir zeigen den Satz in fünf Schritten. Die ersten drei sind schon im Spezialfall von elliptischen Operatoren auf $C^{2,\alpha}$ -Räumen aufgetreten.

Schritt 1 $\ker L$ und $\ker L'$ sind endlichdimensional

Sei $x_k \in \ker L$ mit $\|x_k\| \leq 1$. Dann gilt $x_k = -Kx_k$, also konvergiert x_k gegen ein $x \in \ker L$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Nach Satz 2.2 ist $\ker L$ endlichdimensional. Weiter gilt $L' = (\operatorname{Id} + K)' = \operatorname{Id} + K'$. Da K' kompakt ist nach Lemma 9.2, ist auch $\ker L'$ endlichdimensional.

Schritt 2 Sei X_0 abgeschlossenes Komplement von $\ker L$. Dann gibt es ein $\mu > 0$
mit $\|Lx\| \geq \mu\|x\|$ für alle $x \in X_0$.

Andernfalls finde $x_k \in X_0$, $\|x_k\| = 1$, mit $\|Lx_k\| < \frac{1}{k}$. Wir können $Kx_k \rightarrow x \in X$ annehmen. Dann folgt aber

$$x_k = Lx_k - Kx_k \rightarrow -x, \text{ also } x \in X_0 \text{ und } \|x\| = 1.$$

Aber $Lx = \lim_{k \rightarrow \infty} Lx_k = 0$, ein Widerspruch.

Schritt 3 Bild L ist abgeschlossen.

Sei $y_k = Lx_k \rightarrow y \in X$. Wir können $x_k \in X_0$ annehmen. Dann folgt aus Schritt 2

$$\|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{\mu} \|L(x_k - x_l)\| = \frac{1}{\mu} \|y_k - y_l\| \rightarrow 0 \quad \text{mit } k, l \rightarrow \infty.$$

Also konvergiert $x_k \rightarrow x$, und $y = \lim_{k \rightarrow \infty} Lx_k = Lx \in \text{Bild } L$.

Schritt 4 $(\text{coker } L)' \cong \ker L'$

Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} F : \ker L' &\rightarrow (\text{coker } L)', & (F\varphi)[y] &= \varphi(y), \\ G : (\text{coker } L)' &\rightarrow \ker L', & (G\psi)(y) &= \psi([y]). \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass F, G wohldefiniert, stetig und zueinander invers sind. Zunächst ist F wohldefiniert, denn es ist

$$\varphi(y + Lx) = \varphi(y) + (L'\varphi)(x) = \varphi(y), \quad \text{für } \varphi \in \ker L'.$$

Die Norm auf $\text{coker } L$ ist $\|[y]\| = \inf_{x \in X} \|y + Lx\|$, siehe Satz 1.3. Es folgt für $x \in X$

$$|(F\varphi)[y]| = |\varphi(y + Lx)| \leq \|\varphi\| \|y + Lx\|.$$

Bilden des Infimums über alle $x \in X$ ergibt $|(F\varphi)[y]| \leq \|\varphi\| \|[y]\|$, das heißt F ist stetig mit Norm $\|F\| \leq 1$. Die Abbildung G bildet nach $\ker L'$ ab, denn

$$L'(G\psi)(x) = (G\psi)(Lx)\psi([Lx]) = 0.$$

Für die Stetigkeit von G berechnen wir für $y \in Y$

$$|(G\psi)(y)| = |\psi([y])| \leq \|\psi\| \|[y]\| \leq \|\psi\| \|y\|,$$

das heißt es gilt auch $\|G\| \leq 1$. Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} (GF\varphi)(y) &= (F\varphi)([y]) = \varphi(y) \Rightarrow GF = \text{Id}_{\ker L'}, \\ (FG\psi)[y] &= G\psi(y) = \psi([y]) \Rightarrow FG = \text{Id}_{(\text{coker } L)'}. \end{aligned}$$

Zusammen mit Schritt 1 ist nun gezeigt, dass $\text{coker } L$ endlichdimensional ist und damit L ein Fredholmoperator.

Schritt 5 Bestimmung des Fredholmindex

Im nachfolgenden Satz zeigen wir, dass die Menge der Fredholmoperatoren offen ist und der Index lokal konstant. Somit ist die Funktion $t \mapsto \text{ind}(\text{Id} + tK)$ konstant, also gleich Null. \square

Satz 9.3 *Sei $L : X \rightarrow Y$ Fredholmoperator. Dann hat L in $L(X, Y)$ eine Umgebung, die aus Fredholmoperatoren mit demselben Index besteht.*

BEWEIS: Wähle abgeschlossene Komplemente $X = X_0 \oplus \ker L$ und $Y = \text{Bild } L \oplus Y_0$, insbesondere $\dim Y_0 < \infty$. Die Projektionen auf die Komponenten sind stetig. Die Abbildung $L_0 = P_{\text{Bild } L} L|_{X_0} : X_0 \rightarrow \text{Bild } L$ ist bijektiv, also beschränkt invertierbar nach Satz 4.4. Für $S \in L(X, Y)$ setze $S_0 := P_{\text{Bild } L} S|_{X_0} : X_0 \rightarrow \text{Bild } L$. Dann gilt

$$\|S_0 - L_0\| = \|P_{\text{Bild } L}(S - L)|_{X_0}\| \leq C \|S - L\|.$$

Die Menge der invertierbaren Operatoren ist offen, also ist S_0 invertierbar für $\|S - L\| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für $x \in X_0$ mit $C = \|P_{\text{Bild } L}\| < \infty$

$$C \|Sx\| \geq \|P_{\text{Bild } L} Sx\| = \|S_0 x\| \geq \lambda \|x\| \quad \text{mit } \lambda = \|S_0^{-1}\|^{-1}.$$

Aus Schritt 3 im vorangegangenen Beweis folgt, dass $S_0(X_0)$ ein abgeschlossener Unterraum ist. Wir zeigen die Behauptung nun in drei Schritten.

Schritt 1 Die Abbildung $Y_0 \rightarrow Y/S(X_0)$, $y_0 \mapsto [y_0]$, ist ein Isomorphismus.

Für die Injektivität sei $y_0 \in Y_0$ mit $[y_0] = 0$, also $y_0 = Sx_0$ für ein $x_0 \in X_0$. Es folgt

$$0 = P_{\text{Bild } L} y_0 = P_{\text{Bild } L} Sx_0 = S_0 x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0, \text{ also } y_0 = 0.$$

Für die Surjektivität suchen wir zu $y \in Y$ ein $y_0 \in Y_0$ und ein $x_0 \in X_0$ mit $y = y_0 + Sx_0$. Wenden wir hier $P_{\text{Bild } L}$ an, so ergibt sich

$$P_{\text{Bild } L} y = P_{\text{Bild } L} Sx_0 = S_0 x_0.$$

Wir müssen also $x_0 = S_0^{-1} P_{\text{Bild } L} y$ wählen, sowie dann $y_0 = y - S(x_0)$. Es bleibt zu zeigen dass $y_0 \in Y_0$. Aber das folgt aus

$$P_{\text{Bild } L} y_0 = P_{\text{Bild } L} y - P_{\text{Bild } L} Sx_0 = P_{\text{Bild } L} y - S_0 S_0^{-1} P_{\text{Bild } L} y = 0.$$

Insbesondere: die Inklusionen $S(X_0) \subset \text{Bild } S \subset Y$ haben endliche Kodimension, $\text{Bild } S$ ist abgeschlossen und

$$\dim Y/S(X_0) = \dim Y/\text{Bild } S + \dim \text{Bild } S/S(X_0).$$

Schritt 2 Die Projektion $\ker S \rightarrow X/X_0$, $x \mapsto [x]$, ist injektiv.

Ist $Sx = 0$ für $x \in X_0$, so folgt $0 = P_{\text{Bild } L} S|_{X_0} x = S_0 x$, also $x = 0$. Insbesondere ist $\dim \ker S < \infty$ und somit S Fredholmoperator.

Schritt 3 Betrachte nun $\tilde{S} : X/X_0 \rightarrow Y/S(X_0)$, $\tilde{S}[x] = [Sx]$.

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für $x_0 \in X_0$ ist $[S(x + x_0)] = [Sx]$ in $Y/S(X_0)$. Offenbar ist $\text{Bild } \tilde{S} = \text{Bild } S/S(X_0)$. Nun ist $\tilde{S}[x] = 0$ genau wenn $Sx \in S(X_0)$, das heißt es gibt $x_0 \in X_0$ mit $x - x_0 \in \ker S$. Das ist aber äquivalent dazu, dass $[x]$ in der Projektion von $\ker S$ nach X/X_0 liegt. Nach Schritt 2 hat der Raum dieser $[x]$ die Dimension von $\ker S$. Jetzt wenden wir auf \tilde{S} die Dimensionsformel an:

$$\begin{aligned} \dim \ker L - \dim \ker S &= \dim X/X_0 - \dim \ker \tilde{S} && \text{(wie soeben bestimmt)} \\ &= \dim \text{Bild } \tilde{S} && \text{(Dimensionsformel)} \\ &= \dim \text{Bild } S/S(X_0) && \text{(siehe oben)} \\ &= \dim Y/S(X_0) - \dim Y/\text{Bild } S && \text{(nach Schritt 2)} \\ &= \dim \text{coker } L - \dim \text{coker } S && \text{(nach Schritt 1)}. \end{aligned}$$

Also haben L und S denselben Index. □

Wir müssen zum Beweis noch folgende Tatsache nachtragen.

Lemma 9.3 *Sei V Unterraum eines Banachraums X . Es gelte*

$$\dim V < \infty \quad \text{oder} \quad \dim X/V < \infty \quad \text{mit } V \text{ abgeschlossen.}$$

Dann hat V ein abgeschlossenes Komplement.

BEWEIS: Im Fall $\dim V = n < \infty$ sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V , und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die duale Basis von V' , also $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Nach Hahn-Banach, Satz 3.1, haben die φ_i eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_i \in X'$. Definiere die stetige lineare Abbildung

$$P \in L(X, V), Px = \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i(x)v_i.$$

Es folgt $Pv_j = v_j$, $P^2 = P$ und $P|_V = \text{Id}_V$. Für $x \in X$ folgt $x = Px + (x - Px) \in V \oplus \ker P$. Der Raum $\ker P$ ist ein Komplement wie verlangt.

Im Fall $\dim X/V = n < \infty$, mit V abgeschlossen, wähle eine Basis $[x_1], \dots, [x_n]$ von X/V . Dann ist $\text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Komplement. \square

Satz 9.4 (Fredholmsche Alternative für das Dirichletproblem) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte den schwach definierten Operator

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)', Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u) - \sum_{j=1}^n \partial_j(b^j u) + \sum_{j=1}^n c^j \partial_j u + qu$$

mit Koeffizienten $a^{ij}, b^j, c^j, q \in L^\infty(\Omega)$. Es gelte die Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{mit } \lambda > 0.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) L ist Fredholmoperator vom Index Null.
- (2) $\phi \in \text{Bild } L \iff \phi(u) = 0$ für alle $u \in \ker L^*$.
- (3) Für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\|Lu\|_{W^{1,2}(\Omega)'} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)'})$$

mit einer Konstanten $C < \infty$ abhängig von den L^∞ -Schranken der Koeffizienten, der Elliptizitätskonstante $\lambda > 0$ und dem Durchmesser von Ω .

Hier bezeichnet $L^* : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)'$ den zu L formal adjungierten Operator, der durch $L^* = L' \circ J$ definiert ist. Dabei ist $J : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{1,2}(\Omega)''$ die kanonische Einbettung. Es gilt explizit

$$L^*u = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ji}\partial_i u) - \sum_{j=1}^n \partial_j(c^j u) + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j u + qu.$$

Die Definition impliziert $Lu(v) = L^*v(u)$. Ist die Anwendung des Funktionals Lu als L^2 -Integral interpretierbar, so hat man

$$\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^*v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Der Operator L^* ist also dann der adjungierte Operator bezüglich des L^2 -Skalarprodukts.

Literatur

- [1] ALT, H.W. Lineare Funktionalanalysis, 6. Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg 2012.
- [2] GILBARG, D., TRUDINGER, N. Elliptic partial differential equations of second order (2. edition), Springer-Verlag 1983.
- [3] HIRZEBRUCH, F., SCHARLAU, W., Einführung in die Funktionalanalysis, B.I. Hochschultaschenbuch Band 296, Mannheim 1971.