Elementare Differentialgeometrie

Sommersemester 2011

Prof. Dr. E. Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Zusammenfassung

Dieses Skript ist aus Vorlesungen entstanden, die ich im Sommer 2006 und Sommer 2011 in Freiburg gehalten habe. Die Vorlesungen beruhten teilweise auf einem Skript von V. Bangert. Ich habe in neuerer Zeit einige Abschnitte überarbeitet. Das Skript ist noch nicht vollständig, es fehlt eine Diskussion der hyperbolischen Ebene. Ich hoffe aber, dass es auch so zur Vorbereitung auf Prüfungen und als Begleittext zur Vorlesung hilfreich ist.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung zu Euklidischen Isometrien

Eine Abbildung $f : (X,d) \to (Y,d)$ zwischen metrischen Räumen heisst isometrisch, falls
$$d\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d(x_1, x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in X.$$
Offenbar ist eine isometrische Abbildung injektiv. Sie heißt Isometrie, wenn sie außerdem surjektiv ist, und damit bijektiv. Ziel ist hier die Bestimmung aller Isometrien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezüglich des Euklidischen Abstands $d(x,y) = |x - y|$. Die Invarianz geometrischer Eigenschaften von Kurven oder Flächen unter Isometrien wird später oft relevant sein.

Lemma 0.1 *Die Isometrien eines metrischen Raums (X,d) bilden eine Gruppe.*

Beweis: Gemeint ist, dass die Isometrien bzgl. der Verkettung eine Gruppe bilden, das heißt eine Untergruppe der Bijektionen von X. Aber für Isometrien f, g von X gilt

$$d\big(g^{-1}f(x), g^{-1}f(y)\big) = d\big(gg^{-1}f(x), gg^{-1}f(y)\big) = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y),$$

das heißt $g^{-1}f$ ist wieder Isometrie. □

Die Translationen $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_a(x) = x + a$, sind offenbar Isometrien. Aus der linearen Algebra kennen wir außerdem die orthogonalen Abbildungen

$$\mathbb{O}(n) = \{S \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) : \langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir zeigen nun, dass sich jede Isometrie des $\mathbb{R}^n$ aus einer Translation und einer orthogonalen Abbildung zusammensetzt.

Satz 0.1 (Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n$) *Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ sind von der Form*
$$f(x) = Sx + a \quad \text{mit } S \in \mathbb{O}(n) \quad \text{und } a \in \mathbb{R}^n.$$
Diese Abbildungen nennt man auch Euklidische Bewegungen (rigid motions).

Beweis: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, zunächst mit $f(0) = 0$. Dann folgt

$$|f(x)| = d\big(f(x), 0\big) = d\big(f(x), f(0)\big) = d(x,0) = |x|.$$

Mit der Polarisationsformel schließen wir, dass f das Skalarprodukt erhält:

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= -\frac{1}{2}\big(|f(x) - f(y)|^2 - |f(x)|^2 - |f(y)|^2\big) \\
&= -\frac{1}{2}(|x-y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\
&= \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Ist $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis, so folgt

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

das heißt $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ ist wieder eine Orthonormalbasis, und es folgt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i) \rangle \, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i f(e_i).$$

Somit ist f eine lineare Abbildung (was ja nicht vorausgesetzt war!). Da f das Skalarprodukt erhält, ist $f(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$. Ist $f(0) = a \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so gilt $(\tau_{-a} \circ f)(0) = 0$. Wie gezeigt ist dann $\tau_{-a} \circ f(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$, also $f(x) = Sx + a$. $\square$

Bemerkung. Für eine Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Darstellung $f(x) = Sx + a$ eindeutig bestimmt, denn es gilt $a = f(0)$ und $S = Df(0)$ (sogar $S = Df(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$).

Definition 0.1 *Die Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Sx + a$, heißt orientierungserhaltend oder eigentliche Bewegung, falls* $\det S = 1$.

1 Bogenlänge parametrisierter Kurven

Definition 1.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt parametrisierte Kurve (der Klasse C^k) im $\mathbb{R}^n$.*

Mit $I = [a, b]$ bezeichnen wir die Menge $\{c(a), c(b)\}$ als die Endpunkte von c, genauer ist $c(a)$ der Anfangspunkt und $c(b)$ der Endpunkt.

Beispiel 1.1 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = p + tv$, wobei $p \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

Beachten Sie, dass der Fall $v = 0$, also $c(t) = p$ für alle t, auch zugelassen ist.

Beispiel 1.2 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = r(\cos t, \sin t)$.
Kreis mit Radius $r > 0$

Beispiel 1.3 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (r\cos t, r\sin t, a\,t)$
Schraubenlinie mit Radius $r > 0$, Ganghöhe $2\pi a$

Eine Zerlegung Z von $I = [a, b]$ ist ein Tupel $(t_0, \ldots, t_N)$ mit $a = t_0 \le t_1 \ldots \le t_N = b$. Für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})|. \tag{1.1}$$

$L_Z(c)$ ist die Länge des c einbeschriebenen Polygonzugs, der durch Z definiert ist.

Definition 1.2 *Sei $I = [a, b]$. Die Länge der parametrisierten Kurve $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ist*

$$L(c) = \sup_Z L_Z(c) \in [0, \infty].$$

Ist $L(c) < \infty$, so heißt c rektifizierbar.

Lemma 1.1 *Sei $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante $\mathrm{Lip}(c) < \infty$. Dann ist c rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) \le \mathrm{Lip}(c)\,|I|.$$

Beweis: Für eine beliebige Zerlegung Z ist

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \le \mathrm{Lip}(c) \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) = \mathrm{Lip}(c)\,|I|.$$

□

Lemma 1.2 *Sei $\tau \in I = [a, b]$. Dann gilt für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$*

$$L(c) = L(c|_{[a,\tau]}) + L(c|_{[\tau,b]}).$$

Beweis: Setze $I_1 = [a, \tau]$ und $I_2 = [\tau, b]$. Sind Z_1, Z_2 Zerlegungen von I_1 und I_2, so ist (Z_1, Z_2) Zerlegung von I und folglich

$$L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) = L_{(Z_1,Z_2)}(c) \leq L(c).$$

Bildung des Supremums über alle Z_1, Z_2 ergibt

$$L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}) \leq L(c).$$

Für die umgekehrte Ungleichung sei $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Dann gibt es ein $r \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\tau \in [t_{r-1}, t_r]$, und wir erhalten die Zerlegungen $Z_1 = (t_0, \ldots, t_{r-1}, \tau)$ von I_1 sowie $Z_2 = (\tau, t_r, \ldots, t_N)$ von I_2. Es folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
L_Z(c) &= \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1} |c(t_i) - c(t_{i-1})| + |c(\tau) - c(t_{r-1})| + |c(t_r) - c(\tau)| + \sum_{i=r+1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \\
&= L_{Z_1}(c|_{I_1}) + L_{Z_2}(c|_{I_2}) \\
&\leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}).
\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle Z ergibt

$$L(c) \leq L(c|_{I_1}) + L(c|_{I_2}).$$

□

Satz 1.1 (Bogenlängenformel) *Sei $I = [a, b]$ und $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ stückweise C^1. Dann ist c rektifizierbar und es gilt*

$$L(c) = \int_I |c'|.$$

Beweis: Wir können $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ annehmen, für stückweise C^1-Kurven verwenden wir dann die C^1-Aussage auf jedem der Teilintervalle und addieren mit Lemma 1.2. Für jede Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ von $[a, b]$ gilt

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t)\, dt \Big| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)|\, dt = \int_a^b |c'(t)|\, dt.$$

Also ist c rektifizierbar und es folgt

$$L(c) \leq \int_a^b |c'(t)|\, dt. \tag{1.2}$$

Definiere die *Bogenlängenfunktion* von c durch $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\sigma(t) = L(c|_{[a,t]})$. Wir zeigen eine differentielle Fassung der Behauptung, und zwar

$$\sigma'(t) = |c'(t)| \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \tag{1.3}$$

In der Tat folgt die Aussage hieraus durch Integration:

$$L(c) = \sigma(b) = \underbrace{\sigma(a)}_{=0} + \int_a^b \sigma'(t)\,dt = \int_a^b |c'(t)|\,dt.$$

Nun gilt nach Definition der Länge, Lemma 1.2 und Ungleichung (1.2)

$$\frac{|c(t_2) - c(t_1)|}{t_2 - t_1} \leq \frac{L(c|_{[t_1,t_2]})}{t_2 - t_1} = \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |c'(t)|\,dt.$$

Für $t_2 \searrow t_1$ bzw. $t_1 \nearrow t_2$ ergibt sich (1.3), und damit der Satz. □

Grob gesagt besteht eine parametrisierte Kurve aus ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ und einem Fahrplan, wie dieses Bild durchlaufen werden soll. In der Physik spielt der Fahrplan eine wesentliche Rolle – zum Beispiel das 2. Keplersche Gesetz für die Bewegung der Planeten um die Sonne. In der Geometrie ist man gerade an Eigenschaften interessiert, die nicht vom Fahrplan abhängen. Dies zeigen wir jetzt für die Bogenlänge.

Lemma 1.3 *Sei $c \in C^0(I_1, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C^0(I_2, I_1)$ bijektiv. Dann gilt $L(c \circ \varphi) = L(c)$.*

Beweis: Seien $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2$. Mit dem Zwischenwertsatz sieht man leicht, dass φ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Ist $Z = (s_0, \ldots, s_N)$ Zerlegung von I_2 und $t_i = \varphi(s_i)$, so ist im ersten Fall $(t_0, \ldots, t_N)$ Zerlegung von I_1, im zweiten Fall ist $(t_N, \ldots, t_0)$ eine solche Zerlegung. In jedem Fall gilt

$$L_Z(c \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{N} |c(\varphi(s_i)) - c(\varphi(s_{i-1}))| = \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})| \leq L(c).$$

Es folgt $L(c \circ \varphi) \leq L(c)$. Aber $c = (c \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$, und somit $L(c \circ \varphi) = L(c)$. □

Im allgemeinen muss das Bild einer parametrisierten Kurve nicht lokal eine Untermannigfaltigkeit sein, selbst wenn $c \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$. Es kann „Singularitäten" geben wie in folgendem Beispiel der Neil'schen Parabel.

Beispiel 1.4 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2, t^3)$

Definition 1.3 *Eine Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt regulär, falls*

$$c'(t) \neq 0 \quad \textit{für alle } t \in I.$$

Wir haben gesehen, dass die Bogenlänge unter stetigen Umparametrisierungen invariant ist. Wir wollen den Begriff der Umparametrisierung aber enger fassen, damit die Eigenschaft der Regularität erhalten bleibt.

Definition 1.4 *Seien $c_k : I_k \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2$. Dann heißt c_2 Umparametrisierung von c_1, falls es ein $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ gibt mit $\varphi' \neq 0$, so dass $c_2 = c_1 \circ \varphi$.*

Mit dieser Definition bleibt die Regularität bei Umparametrisierung erhalten, denn

$$(c_1 \circ \varphi)' = (c_1' \circ \varphi)\, \varphi' \neq 0 \qquad \text{falls } c', \varphi' \neq 0.$$

φ heißt richtungstreu wenn $\varphi' > 0$, andernfalls heißt φ richtungsumkehrend. Weitere Größen, die unter Umparametrisierungen invariant sind:

- das Bild $c(I)$ von c (andere Bezeichnung: Spur von c)
- die Menge $\{c(a), c(b)\}$ der Endpunkte; im richtungstreuen Fall Anfangspunkt $c(a)$ und Endpunkt $c(b)$ einzeln.
- die Tangente $\mathbb{R}\, c'(t)$ von c in t. Genauer hat $c_2 = c_1 \circ \varphi$ im Punkt s mit $\varphi(s) = t$ dieselbe Tangente.

Lemma 1.4 *Auf der Menge aller parametrisierten Kurven c im $\mathbb{R}^n$ ist durch*

$$c_1 \sim c_2 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 \textit{ ist Umparametrisierung von } c_1$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Beweis: Zu zeigen ist die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Beachte dazu:

$$\begin{array}{lcrcl} c : I \to \mathbb{R}^n & \Rightarrow & c & = & c \circ \mathrm{id}_I \\ c_2 = c_1 \circ \varphi & \Rightarrow & c_1 & = & c_2 \circ \varphi^{-1} \\ c_2 = c_1 \circ \varphi,\ c_3 = c_2 \circ \psi & \Rightarrow & c_3 & = & c_1 \circ (\varphi \circ \psi). \end{array}$$

Da $\varphi' \neq 0$, ist φ^{-1} von der Klasse C^1 und es gilt

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} \neq 0.$$

Ebenfalls ist $\varphi \circ \psi$ von der Klasse C^1 mit Ableitung $(\varphi \circ \psi)' = (\varphi' \circ \psi)\, \psi' \neq 0$. Damit sind die Relationen $c_2 \sim c_1$ und $c_1 \sim c_3$ bewiesen. $\square$

Definition 1.5 *Eine Kurve $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, falls gilt:*

$$|c'(s)| = 1 \quad \textit{für alle } s \in I.$$

Für $[s_1, s_2] \subset I$ folgt dann aus Satz 1.1

$$L(c|_{[s_1,s_2]}) = \int_{s_1}^{s_2} |c'(s)|\, ds = s_2 - s_1,$$

das heißt eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c bildet längentreu ab. Physikalisch betrachtet wird die Kurve mit der konstanten Absolutgeschwindigkeit $|c'| = 1$ durchlaufen.

Satz 1.2 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve der Klasse C^k mit $k \geq 1$. Dann gibt es eine Bijektion $\varphi \in C^k(J, I)$ mit $\varphi' > 0$, so dass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis: Betrachte für ein $t_0 \in I$ die Bogenlängenfunktion

$$\sigma : I \to \mathbb{R}, \quad \sigma(t) = \int_{t_0}^{t} |c'(\tau)|\, d\tau.$$

Es gilt für jede Bijektion $\varphi \in C^1(J, I)$ mit $\varphi' > 0$ nach der Kettenregel

$$|(c \circ \varphi)'| = (|c'| \circ \varphi)\, \varphi' = (\sigma' \circ \varphi)\, \varphi' = (\sigma \circ \varphi)'.$$

Der Satz folgt, wenn wir φ als Umkehrfunktion von σ wählen können. Aber nach Voraussetzung ist $\sigma'(t) = |c'(t)| > 0$, und mit $J = \sigma(I)$ ist $\sigma \in C^k(I, J)$ ist umkehrbar. $\square$

Bemerkung. Sind c_1 und $c_2 = c_1 \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt

$$1 = |c_2'(s)| = |c_1'\big(\varphi(s)\big)|\, |\varphi'(s)| = |\varphi'(s)|,$$

das heißt $\varphi(s) = \pm s + s_0$ für $s_0 = \varphi(0) \in \mathbb{R}$.

2 Krümmung von Kurven

Definition 2.1 *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Kurve. Eine Einheitsnormale längs c ist eine Abbildung $\nu \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit*

$$|\nu(t)| = 1 \;\; \textit{und} \;\; \langle c'(t), \nu(t)\rangle = 0 \qquad \textit{für alle } t \in I.$$

Für ebene Kurven, also $n = 2$, gibt es eine bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte Einheitsnormale. Wir wollen uns im folgenden auf diesen Fall konzentrieren. Um eine Normale explizit anzugeben, sei $J \in \mathbb{SO}(2)$ die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$,

$$Je_1 = e_2, Je_2 = -e_1 \quad \text{bzw.} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Identifizieren wir $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = x+iy \in \mathbb{C}$, so gilt $Jz = iz$ für $i = \sqrt{-1}$.

Lemma 2.1 *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ regulär. Es gibt genau zwei Einheitsnormalen längs c, nämlich*

$$\nu = J\tau \quad \textit{und} \quad \nu = -J\tau \quad \textit{wobei } \tau = \frac{c'}{|c'|}.$$

Beweis: Es gilt $|J\tau| = |\tau| = 1$ und $\langle J\tau, \tau\rangle = 0$, also sind $\pm J\tau$ Einheitsnormalen längs c. Für jede Einheitsnormale ν längs c gilt, da $(c'(t))^\perp$ eindimensional ist,

$$\langle \nu(t), J\tau(t)\rangle = \pm 1 \quad \text{für alle } t \in I.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist entweder $\nu = J\tau$ oder $\nu = -J\tau$ auf ganz I. □

Aus der Darstellung folgt $\nu \in C^{k-1}(I, \mathbb{R}^2)$, falls $c \in C^k(I, \mathbb{R}^2)$. Bei der folgenden Definition beschränken wir uns zunächst auf bogenlängenparametrisierte Kurven, weil die Formeln dann besonders einfach sind. Wir kommen aber auf beliebige reguläre Kurven im Anschluss zurück.

Definition 2.2 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert, und ν Normale längs c. Die Krümmung von c bezüglich ν ist die Funktion*

$$\varkappa : I \to \mathbb{R}, \quad \varkappa(s) = \langle c''(s), \nu(s)\rangle.$$

Zur Rechtfertigung der Definition betrachten wir das offensichtliche Beispiel, nämlich Kreise.

Beispiel 2.1 Definiere die nach der Bogenlänge parametrisierten Kreise

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\; c(s) = r\big(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\big).$$

Wir wählen $\nu(s) = -\big(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}\big)$, das heißt ν weist ins Innere des Kreises. Es ergibt sich

$$\varkappa(s) = \langle c''(s), \nu(s)\rangle = \frac{1}{r} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Die Krümmung ist also konstant, wie es sein soll, und umgekehrt proportional zum Radius.

Um allgemein das Vorzeichen der Krümmung zu interpretieren, betrachte

$$\begin{aligned} E^+ &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z - c(s_0), \nu(s_0)\rangle > 0\} \\ E^- &= \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z - c(s_0), \nu(s_0)\rangle < 0\} \end{aligned}$$

Mit $h(s) = \langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle$ gilt

$$h(s) > 0 \text{ (bzw. } h(s) < 0) \quad \Leftrightarrow \quad c(s) \in E^+ \text{ (bzw. } c(s) \in E^-).$$

Berechne nun $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = \langle c'(s_0), \nu(s_0)\rangle = 0$ und weiter

$$h''(s_0) = \langle c''(s_0), \nu(s_0)\rangle = \varkappa(s_0) \quad \Rightarrow \quad h(s_0) = \frac{1}{2}\varkappa(s_0)(s - s_0)^2 + o(|s - s_0|^2),$$

das heißt es gilt

$$\begin{aligned} \varkappa(s_0) > 0 &\quad \Rightarrow \quad c(s) \in E^+ \text{ für } s \text{ nahe } s_0, \\ \varkappa(s_0) < 0 &\quad \Rightarrow \quad c(s) \in E^- \text{ für } s \text{ nahe } s_0. \end{aligned}$$

Lemma 2.2 *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert und $\nu : I \to \mathbb{R}^2$ Normale längs c. Sei $F(z) = Sz + a$ eine Euklidische Bewegung, also $S \in \mathbb{O}(2)$ und $a \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $S\nu$ eine Normale längs $F \circ c$, und bezüglich dieser Normalen haben beide Kurven dieselbe Krümmungsfunktion.*

Beweis: Zunächst gilt $|(F \circ c)'| = |Sc'| = |c'| = 1$, das heißt $F \circ c$ ist auch nach der Bogenlänge parametrisiert. Weiter folgt

$$|S\nu| = |\nu| = 1 \quad \text{sowie} \quad \langle (F \circ c)', S\nu\rangle = \langle Sc', S\nu\rangle = \langle c', \nu\rangle = 0.$$

Somit ist $S\nu$ Normale längs $F \circ c$. Schließlich berechnen wir

$$\langle (F \circ c)'', S\nu\rangle = \langle (Sc')', S\nu\rangle = \langle Sc'', S\nu\rangle = \langle c'', \nu\rangle,$$

womit die Gleichheit der Krümmungsfunktionen verifiziert ist. □

Lemma 2.3 (Frenetgleichungen) *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert, und ν Einheitsnormale längs c. Dann gelten mit $\tau = c'$ die Gleichungen*

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die Vektoren τ, ν sind normiert, daher gilt

$$0 = \frac{1}{2}\langle \tau, \tau\rangle' = \langle \tau', \tau\rangle \quad \text{und} \quad 0 = \frac{1}{2}\langle \nu, \nu\rangle' = \langle \nu', \nu\rangle.$$

Es folgt $\tau' = \langle \tau', \nu\rangle\nu = \langle c'', \nu\rangle\nu = \varkappa\nu$ nach Definition der Krümmung. Schließlich

$$\langle \nu', \tau\rangle = \underbrace{\langle \nu, \tau\rangle'}_{=0} - \langle \nu, \tau'\rangle = -\varkappa.$$

□

Beispiel 2.2 Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisert, und mit Krümmung identisch Null. Dann folgt aus den Frenetgleichungen $c'' \equiv 0$, also $c(s) = p + sv$ für $p, v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$. Die Kurve c parametrisiert also ein Stück einer Geraden.

Satz 2.1 (Hauptsatz für ebene Kurven) *Zu jeder Funktion $k \in C^0(I)$ gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$, die bezüglich einer Normalen ν die Krümmung $\varkappa = k$ hat. Die Kurve ist eindeutig bestimmt bis auf Euklidische Bewegungen.*

Beweis: Wir zeigen als erstes die Eindeutigkeit. Seien $c_{1,2} \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung $\varkappa_{1,2} = k$ bezüglich der Normalen $\nu_{1,2}$. Wir wählen $s_0 \in I$ und können nach einer Euklidischen Bewegung annehmen, dass

$$c_1(s_0) = c_2(s_0),\ c_1'(s_0) = c_2'(s_0) \text{ und } \nu_1(s_0) = \nu_2(s_0).$$

Aber dann lösen sowohl $\tau_1 = c_1', \nu_1$ als auch $\tau_2 = c_2', \nu_2$ die Frenetgleichungen mit demselben Koeffizienten k, und haben auch dieselben Anfangswerte. Der Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem liefert $\tau_1 = \tau_2$, und damit $c_1 = c_2$ durch Integration. Für die Existenz geben wir die gesuchte Kurve explizit an, und zwar sei

$$c'(s) = \big(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)\big) \quad \text{mit } \theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(\sigma)\, d\sigma.$$

Bezüglich $\nu(s) = -\big(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\big)$ hat c die Krümmung $\varkappa = k$ wie gefordert.

□

Wir kommen jetzt auf Kurven zurück, die nicht nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Die folgende Definition ist konsistent mit Definition 2.2.

Definition 2.3 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre Kurve. Bezüglich der Einheitsnormalen ν längs c ist die Krümmung definiert durch*

$$\varkappa : I \to \mathbb{R},\ \varkappa(t) = \frac{\langle c''(t), \nu(t)\rangle}{|c'(t)|^2}.$$

Lemma 2.4 *Sei $c_1 \in C^2(I_1, \mathbb{R}^2)$ reguläre Kurve mit Einheitsnormale ν_1 längs c_1. Ist $c_2 = c_1 \circ \varphi \in C^2(I_2, \mathbb{R}^2)$ eine Umparametrisierung, so ist $\nu_1 \circ \varphi$ Normale längs c_2 und es gilt*

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 \circ \varphi.$$

Beweis: Es gilt $\varphi \in C^2(I_2, I_1)$ nach Übungsaufgabe XX. Wir berechnen

$$c_2' = (c_1' \circ \varphi)\, \varphi' \quad \text{ und } \quad c_2'' = (c_1'' \circ \varphi)\, (\varphi')^2 + (c_1' \circ \varphi)\, \varphi''.$$

Also ist $\nu_1 \circ \varphi$ Normale längs c_2, und wir erhalten

$$\varkappa_2 = \frac{\langle c_2'', \nu_1 \circ \varphi\rangle}{|c_2'|^2} = \frac{\langle c_1'' \circ \varphi, \nu_1 \circ \varphi\rangle}{|c_1' \circ \varphi|^2} = \varkappa_1 \circ \varphi.$$

□

Für reguläre Kurven folgt die Invarianz der Krümmung unter Euklidischen Bewegungen direkt aus dem bogenlängenparametrisierten Fall, siehe Lemma 2.2, und der in Lemma 2.4 bewiesenen Invarianz unter Umparametrisierungen.

Beispiel 2.3 Betrachte eine als Graph gegebene Kurve

$$c : I \to \mathbb{R}^2,\ c(x) = \big(x, u(x)\big).$$

Wir haben dann längs c die nach oben weisende Einheitsnormale

$$\nu(x) = \frac{(-u'(x), 1)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}.$$

Für die Krümmung erhalten wir somit die Formel

$$\varkappa(x) = \frac{u''(x)}{\big(1 + u'(x)^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jetzt wollen wir Kurven mit höherer Kodimension betrachten. Die für ebene Kurven gegebene Definition klappt nicht mehr, weil es keine eindeutige Normale gibt. Insbesondere kann ein Vorzeichen der Krümmung nicht sinnvoll definiert werden, deshalb wird die Krümmung als nichtnegativ erklärt. Beachten Sie die Analogie zu Definition 2.3.

Definition 2.4 *Die Krümmung einer regulären Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ ist die Funktion*

$$\varkappa(t) = \frac{\big|c''(t)^\perp\big|}{|c'(t)|^2} \qquad \textit{wobei } (c'')^\perp = c'' - \big\langle c'', \tau \big\rangle \tau \ \textit{ mit } \tau = \frac{c'}{|c'|}.$$

Die Formel kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\varkappa = \frac{\big(|c'|^2 |c''|^2 - \langle c', c'' \rangle^2\big)^{\frac{1}{2}}}{|c'|^3}.$$

Ist $c = c(s)$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt insbesondere

$$\varkappa(s) = |c''(s)|.$$

Genauso wie im Fall $n = 2$ sieht man die Invarianz der Krümmung unter Umparametrisierungen und Euklidischen Bewegungen, wobei hier auf Normalen nicht zu achten ist. Im Gegensatz zu den ebenen Kurven ist im Fall $n \geq 3$ eine Kurve aber nicht bis auf Bewegungen durch die Krümmung bestimmt, dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 2.4 Für die Schraubenlinie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$, gilt $c'(t) = (-r \sin t, r \cos t, a)$ und $c''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$. Daraus folgt $|c'(t)|^2 = r^2 + a^2$, $|c''(t)|^2 = r^2$ und $\langle c'(t), c''(t) \rangle = 0$. Somit ist die Krümmung konstant, und zwar

$$\varkappa(t) = \frac{r}{r^2 + a^2} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

wie für einen Kreis mit Radius $(r^2 + a^2)/r$.

Im höherdimensionalen Fall ist eine Kurve also nicht durch die Krümmung festgelegt, und es stellt sich die Frage nach zusätzlichen Invarianten. So kann für C^3-Kurven im $\mathbb{R}^3$ als weitere Größe die Torsion eingeführt werden. Als erstes Ergebnis kann dann gezeigt werden, dass eine Kurve mit verschwindender Torsion eben ist. Leider ist die Torsion in Nullstellen der Krümmung nicht definiert, und in den Anwendungen muss man sich auf Kurven beschränken, deren Krümmung nicht verschwindet, sogenannte Frenetkurven. Wir wollen das hier nicht vertiefen. Stattdessen kommen wir noch zu einer globalen Interpretation der Krümmung. Dazu führen wir als weitere Variante den Krümmungsvektor einer regulären Kurve ein. Dieser hängt nicht von der Wahl einer Normalen ab.

Definition 2.5 *Der Krümmungsvektor einer regulären Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ ist*

$$\vec{\varkappa} : I \to \mathbb{R}^n,\ \vec{\varkappa}(t) = \frac{c''(t)^\perp}{|c'(t)|^2}.$$

Der Krümmungsvektor hat eine Schlüsselrolle in der Variation der Bogenlänge.

Satz 2.2 (Erste Variation der Bogenlänge) *Sei $c \in C^2(I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \mathbb{R}^n)$ mit $I = [a,b]$. Ist die Kurve $c = c(\cdot, 0)$ regulär, so gilt die Formel*

$$\frac{d}{d\varepsilon} L\big(c(\cdot,\varepsilon)\big)|_{\varepsilon=0} = -\int_I \langle \vec{\varkappa}, \phi \rangle\, ds + \big[\langle \tau(t), \phi(t) \rangle\big]_{t=a}^{t=b} \qquad \textit{für } \phi = \frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0).$$

Dabei sind τ, $\vec{\varkappa}$ Einheitstangente und Krümmungsvektor von c, und $ds = |c'(t)|\, dt$.

Beweis: Wir erhalten durch Differentiation unter dem Integral und partielle Integration

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} L\big(c(\cdot,\varepsilon)\big) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b \Big|\frac{\partial c}{\partial t}(t,\varepsilon)\Big|\, dt|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \Big\langle \tau(t), \frac{\partial^2 c}{\partial \varepsilon \partial t}(t,0) \Big\rangle\, dt \\
&= \int_a^b \langle \tau(t), \phi'(t) \rangle\, dt \\
&= -\int_a^b \langle \tau'(t), \phi(t) \rangle\, dt + \big[\langle \tau(t), \phi(t) \rangle\big]_{t=a}^{t=b}.
\end{aligned}$$

Aber es gilt für jede reguläre Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\tau = \frac{c'}{|c'|}$

$$\tau'(t) = \frac{c'' - \langle c'', \tau \rangle \tau}{|c'|} = \vec{\varkappa}\, |c'|.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Um die Formel an einer festen Stelle anzuwenden, etwa bei $\varepsilon = 0$, reicht es wenn $c(\cdot, 0)$ regulär ist. Aus Stetigkeitsgründen sind die $c(\cdot, \varepsilon)$ ebenfalls regulär für $|\varepsilon|$ hinreichend klein. Ist zum Beispiel $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurve von

$p = c(a)$ nach $q = c(b)$, und hat c kleinste Länge unter allen solchen Kurven, so folgt $\varkappa = 0$ und c parametrisiert die Strecke von p nach q. Denn für alle $\phi \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\phi(a) = \phi(b) = 0$ folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} L(c + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = -\int_I \langle \vec{\varkappa}, \phi \rangle \, ds.$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung ist dann $\vec{\varkappa} = 0$.

3 Umlaufzahl und Jordanscher Kurvensatz

In diesem Kapitel definieren wir für geschlossene Kurven c die Umlaufzahl bezüglich eines Punkts $p \notin c(I)$. Für C^1-Kurven definieren wir die Umlaufzahl durch ein Kurvenintegral, im Anschluss behandeln wir C^0-Kurven durch Approximation.

Sei $(\mathbb{R}^n)^*$ der Raum der Linearformen $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Da jedes λ durch seine Werte $\lambda_j = \lambda(e_j)$ auf der Standardbasis eindeutig bestimmt ist, können wir $(\mathbb{R}^n)^*$ als Raum der Zeilenvektoren $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ auffassen. Eine 1-Form auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$, bzw. ein Zeilenvektor-Feld,

$$\alpha(x) = \big(\alpha_1(x), \ldots \alpha_n(x)\big) \qquad \text{wobei } \alpha_j(x) = \alpha(x)e_j \text{ für } x \in \Omega.$$

Die Funktionen $\alpha_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $\alpha_j(x) = \alpha(x)e_j$, heißen Koeffizienten von α. Als Beispiel einer 1-Form hat man das Differential df einer differenzierbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir schreiben $df \cdot v$ für die Funktion $x \mapsto df(x)v$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ fest. Insbesondere sind die Koeffizienten von df gegeben durch

$$df \cdot e_j : \Omega \to \mathbb{R},\, x \mapsto df(x)e_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x).$$

Das Differential der Funktion $f(x) = x^j$ wird mit dx^j bezeichnet. Durch Anwendung auf e_k folgt für jede 1-Form α wegen $dx^j \cdot e_k = \delta^j_k$ die Koordinatendarstellung

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_j \, dx^j.$$

Die Form α ist von der Klasse C^r, wenn $\alpha_j \in C^r(\Omega)$ für $j = 1, \ldots, n$.

Definition 3.1 (Kurvenintegral von 1-Formen) *Sei α eine stetige 1-Form auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für eine stückweise C^1-Kurve $c : [a,b] \to \Omega$ setzen wir*

$$\int_c \alpha = \int_a^b \alpha\big(c(t)\big)c'(t)\, dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n \alpha_j\big(c(t)\big)(c^j)'(t)\, dt.$$

Für Umparametrisierungen $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ liefert die Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int_{c_2} \alpha &= \int_{a_2}^{b_2} \alpha\big(c_1(\varphi(t)\big) \cdot c_1'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt \\
&= \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \alpha\big(c_1(s)\big) \cdot c_1'(s)\, ds \\
&= \pm \int_{c_1} \alpha \quad \text{für } \operatorname{sign} \varphi' = \pm 1.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.1 (Variationsformel für Kurvenintegrale) *Sei α eine 1-Form der Klasse C^1 auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $c \in C^2([a,b] \times [0,1], \Omega)$*

$$\int_{c(\cdot,1)} \alpha - \int_{c(\cdot,0)} \alpha = \int_{c(b,\cdot)} \alpha - \int_{c(a,\cdot)} \alpha + \int_0^1 \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \Big(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}\Big) \circ c\, \frac{\partial c^i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial c^j}{\partial t}\, dt d\varepsilon.$$

Beweis: Durch Differenzieren unter dem Integral und partielle Integration folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{c(\cdot,\varepsilon)} \alpha &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_a^b \sum_{j=1}^n \alpha_j(c(t,\varepsilon)) \frac{\partial c^j}{\partial t}(t,\varepsilon)\, dt \\
&= \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \circ c\, \frac{\partial c^i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial c^j}{\partial t}\, dt + \int_a^b \sum_{j=1}^n \alpha_j \circ c\, \frac{\partial^2 c^j}{\partial \varepsilon \partial t}\, dt \\
&= \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \circ c \Big(\frac{\partial c^i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial c^j}{\partial t} - \frac{\partial c^i}{\partial t} \frac{\partial c^j}{\partial \varepsilon}\Big)\, dt + \sum_{j=1}^n \alpha_j \circ c\, \frac{\partial c^j}{\partial \varepsilon}\Big|_{t=a}^{t=b}.
\end{aligned}$$

Vertauschen der Indizes i, j und Integration von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = 1$ ergibt die Formel.

□

Bemerkung. Für die affine Variation $c(t,\varepsilon) = (1-\varepsilon)c_0(t) + \varepsilon c_1(t)$ gilt der Satz, auch wenn nur $c_{0,1} \in C^1([a,b], \Omega)$, denn die gemischten zweiten Ableitungen existieren und sind gleich:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial t \partial \varepsilon}(t,\varepsilon) = c_1'(t) - c_0'(t) = \frac{\partial^2 c}{\partial \varepsilon \partial t}(t,\varepsilon).$$

Eine 1-Form α der Klasse C^1 heißt geschlossen auf Ω, wenn

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \quad \text{auf } \Omega \text{ für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Für eine geschlossene 1-Form ist die rechte Seite in Satz 3.1 Null, falls die Variation eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

feste Endpunkte: $c(a,\varepsilon) = p$ und $c(b,\varepsilon) = q$ für alle $\varepsilon \in [0,1]$

geschlossene Kurven: $c(a,\varepsilon) = c(b,\varepsilon)$ für alle $\varepsilon \in [0,1]$.

Definition 3.2 (Umlaufzahl I) *Für $c \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ geschlossen ist die Umlaufzahl bezüglich des Nullpunkts definiert durch*

$$n(c,0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} \qquad \textit{wobei } c(t) = \big(x(t), y(t)\big).$$

Es ist nicht direkt ersichtlich, warum das Integral die Umlaufzahl liefert. Zur Interpretation führen wir den Begriff des Lifts einer Kurve in $\mathbb{S}^1$ ein.

Satz 3.2 (Existenz eines Lifts) *Sei $c \in C^1([a,b], \mathbb{S}^1)$, $c(t) = (x(t), y(t))$. Zu $t_0 \in [a,b]$ wähle $\theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $c(t_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, und definiere*

$$\theta \in C^1([a,b]),\ \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t (xy' - yx').$$

Dann folgt $c(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ für alle $t \in [a,b]$.

Beweis: Wir berechnen einerseits, wenn J die Drehung um $\frac{\pi}{2}$ ist,

$$c' = \langle c', Jc \rangle Jc = (xy' - yx')\, Jc.$$

Andererseits gilt nach Definition von θ

$$(\cos\theta, \sin\theta)' = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = (xy' - yx')\, J(\cos\theta, \sin\theta).$$

Da $c(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ für $t = t_0$ nach Definition, folgt die Gleichheit für alle $t \in [a,b]$ aus dem Eindeutigkeitssatz. $\square$

Für geschlossene Kurven folgt aus dem Satz die Ganzzahligkeit der Umlaufzahl. Wir können dazu $|c(t)| = 1$ annehmen: die Form ω ist geschlossen, also ist das Integral invariant unter einer geeigneten Homotopie. Ist $\theta \in C^1([a,b])$ wie in Satz 3.2 gewählt, so sind $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ gleich für $t = a, b$, und es folgt

$$n(c,0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b (xy' - yx') = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Wir wenden uns jetzt dem technischen Schritt zu, die Definition der Umlaufzahl auf Kurven auszudehnen, die lediglich stetig sind. Dazu stellen wir folgendes fest.

Lemma 3.1 *Seien $c_0, c_1 \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ geschlossen mit*

$$|c_0(t) - c_1(t)| < |c_0(t)| \qquad \textit{für alle } t \in [a,b].$$

Dann folgt $n(c_0, 0) = n(c_1, 0)$.

Beweis: Betrachte für $\varepsilon \in [0,1]$ die affine Variation

$$c : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ c(t,\varepsilon) = (1-\varepsilon)c_0(t) + \varepsilon c_1(t).$$

Die Kurven $c(\cdot, \varepsilon)$ sind geschlossen und es gilt nach Voraussetzung

$$|c(t,\varepsilon)| \geq |c_0(t)| - |c_0(t) - c_1(t)| > 0.$$

Also folgt $n(c_0, 0) = n(c_1, 0)$ nach Satz 3.1 (mit Bemerkung). $\square$

Definition 3.3 (Umlaufzahl II) *Für $c \in C^0([a,b],\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ geschlossen setzen wir*

$$n(c,0) = \lim_{k\to\infty} n(c_k,0),$$

wobei $c_k \in C^1([a,b],\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ Folge geschlossener Kurven mit $c_k \to c$ in $C^0([a,b],\mathbb{R}^2)$.

Wir müssen begründen, dass die Umlaufzahl damit wohldefiniert ist. Für jede Kurve c wie in der Definition ist $\varrho = \min_{t\in[a,b]} |c(t)| > 0$. Sind $c_{1,2} \in C^1([a,b],\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ geschlossen mit $\|c_{1,2} - c\|_{C^0} < \frac{\varrho}{3}$, so folgt

$$|c_1(t) - c_2(t)| < \frac{2\varrho}{3} \leq |c(t)| - \frac{\varrho}{3} < |c_1(t)|,$$

also $n(c_1,0) = n(c_2,0)$ nach Lemma 3.1. Dies zeigt, dass der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} n(c_k,0)$ in Definition 3.3 existiert und nicht von der Wahl der Folge c_k abhängt. Insbesondere sind die Definitionen 3.2 und 3.3 kompatibel.

Es bleibt noch zu zeigen, dass überhaupt eine Folge c_k wie in Definition 3.3 existiert. Dazu setzen wir c periodisch mit Periode $b-a$ fort, und verwenden eine Glättung. Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(t) = 0$ für $|t| \geq 1$, $\eta \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$. Wir betrachten

$$c_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ c_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\eta\Big(\frac{t-t'}{\varepsilon}\Big)c(t')\,dt' = \int_{-1}^{1} \eta(\tau)c(t-\varepsilon\tau)\,d\tau.$$

Nach den Regeln über Parameterintegrale ist die Funktion c_ε glatt. Außerdem gilt mit $\varepsilon \to 0$,

$$|c_\varepsilon(t) - c(t)| = \Big|\int_{-1}^{1} \eta(\tau)\big(c(t-\varepsilon\tau) - c(t)\big)\,d\tau\Big| \leq \sup_{|t_1-t_2|\leq\varepsilon} |c(t_1) - c(t_2)| \to 0,$$

da c gleichmäßig stetig ist. Inbesondere folgt für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$

$$|c_\varepsilon(t)| \geq |c(t)| - |c_\varepsilon(t) - c(t)| \geq \min_{t\in[a,b]} |c(t)| - \|c_\varepsilon - c\|_{C^0} > 0.$$

Also wird c durch die c_ε wie verlangt approximiert.

Satz 3.3 (Homotopieinvarianz der Umlaufzahl) *Sei $c \in C^0([a,b] \times [0,1],\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$, so dass $c_\varepsilon = c(\cdot,\varepsilon)$ geschlossen ist für alle $\varepsilon \in [0,1]$. Dann gilt $n(c_0,0) = n(c_1,0)$.*

Beweis: Wir zeigen, dass die Funktion $\varepsilon \mapsto n(c_\varepsilon,0) \in \mathbb{Z}$ stetig ist. Sei $\varepsilon_k \to \varepsilon \in [0,1]$ gegeben. Wähle dann $\gamma_k \in C^1([a,b],\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ geschlossen mit

$$\|\gamma_k - c_{\varepsilon_k}\|_{C^0} < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad n(\gamma_k,0) = n(c_{\varepsilon_k},0).$$

Es folgt $\|c_\varepsilon - \gamma_k\|_{C^0} \leq \|c_\varepsilon - c_{\varepsilon_k}\|_{C^0} + \|c_{\varepsilon_k} - \gamma_k\|_{C^0} \to 0$. Also gilt

$$n(c_\varepsilon,0) = \lim_{k\to\infty} n(\gamma_k,0) = \lim_{k\to\infty} n(c_{\varepsilon_k},0).$$

□

Bisher haben wir die Umlaufzahl bezüglich des Nullpunkts betrachtet, jetzt verallgemeinern wir noch auf beliebige Punkte im $\mathbb{R}^2$.

Folgerung 3.1 (Lokalkonstanz der Umlaufzahl) *Sei $c \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$ eine geschlossene Kurve. Dann ist die Funktion $n(c, \cdot) : \mathbb{R}^2 \backslash c(I) \to \mathbb{Z}$, $n(c,p) := n(c-p, 0)$, auf den Komponenten von $\mathbb{R}^2 \backslash c(I)$ konstant.*

Beweis: Wir zeigen, dass $n(c, \cdot)$ lokal konstant ist. Aus Stetigkeitsgründen gibt es zu $p \notin c(I)$ ein $d > 0$ mit $|c(t) - p| \geq d$ für alle $t \in [0,1]$. Für $|q - p| < d$ betrachten wir die Homotopie

$$h : I \times [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ h(t, \varepsilon) = c(t) - \big((1-\varepsilon)p + \varepsilon q\big).$$

Es gilt $|h(t,\varepsilon)| \geq |c(t) - p| - \varepsilon |q - p| \geq d - |q - p| > 0$. Aus Satz 3.3 folgt

$$n(c,q) = n(c-q,0) = n(h(\cdot,1),0) = n(h(\cdot,0),0) = n(c-p,0) = n(c,p).$$

$\square$

Beispiel 3.1 Für $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $c(t) = e^{ikt}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$n(c,p) = \begin{cases} k & \text{falls } |p| < 1 \\ 0 & \text{falls } |p| > 1. \end{cases}$$

Denn einerseits berechnen wir

$$n(c,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ike^{ikt}}{e^{ikt}}\, dt = k.$$

Andererseits gilt für $|p| \geq 1 + R$ die Abschätzung

$$|n(c,p)| = |n(c-p,0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|c'(t)|}{|c(t) - p|}\, dt \leq \frac{|k|}{R} \to 0 \quad \text{mit } R \to \infty.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Folgerung 3.1.

Für eine geschlossene Kurve $c \in C^k([a,b], \mathbb{R}^2)$ müssen die Werte der Ableitungen in den Endpunkten nicht notwendig übereinstimmen. Ist dies aber der Fall, das heißt gilt

$$c(a) = c(b),\ c'(a) = c'(b), \ldots, c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b),$$

so nennen wir die Kurve C^k-geschlossen. Dies ist äquivalent dazu, dass die periodische Fortsetzung von c auf $\mathbb{R}$ von der Klasse C^k ist.

Definition 3.4 *Eine geschlossene Kurve $c \in C^0([a,b], \mathbb{R}^2)$ heißt einfach geschlossen, falls ihre Einschränkung auf $[a,b)$ injektiv ist.*

Der Jordansche Kurvensatz besagt, dass jede einfach geschlossene Kurve den $\mathbb{R}^2$ in zwei Komponenten zerlegt, ein Außen- und ein Innengebiet. Wir beweisen den Satz hier für reguläre, C^1-geschlossene Kurven. Wir können dann die lokale Situation einfach beschreiben.

Lemma 3.2 *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ eine einfach geschlossene Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert und C^1-geschlossen ist. Setze $C = \mathrm{Bild}(c)$. Dann hat jeder Punkt $c(s_0) \in C$ eine offene Umgebung W_{s_0} mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $W_{s_0}\backslash C$ *ist disjunkte Vereinigung von zwei Gebieten* $W^{\pm}_{s_0}$,

(2) $(\partial W^{\pm}_{s_0}) \cap W_{s_0} = C \cap W_{s_0}$,

Beweis: Indem wir die Kurve auf $\mathbb{R}$ fortsetzen mit Periode $L = |I|$, können wir $s_0 = 0$ annehmen und betrachten für $\delta > 0$ die Abbildung

$$f : (-2\delta, 2\delta) \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^2,\ f(s,t) = c(s) + t\nu(0).$$

Es gilt $Df(0,0) \in \mathbb{O}(2)$. Wähle $\delta \in (0, L/2)$ so klein, dass f Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Mit $W_0 = f((-\delta,\delta) \times (-\varepsilon,\varepsilon))$ behaupten wir für $\varepsilon \in (0,\delta)$ hinreichend klein

$$c(s) \in W_0,\ s \in [-L/2, L/2] \quad \Leftrightarrow \quad s \in (-\delta,\delta). \tag{3.2}$$

Für $s \in (-\delta,\delta) \subset (-L/2, L/2)$ gilt $c(s) = f(s,0) \in W_0$. Wäre (3.2) für jedes $\varepsilon > 0$ falsch, so gibt es $\sigma_i \in [-L/2, L/2]\backslash(-\delta,\delta)$ und $s_i \in (-\delta,\delta)$, $t_i \to 0$ mit

$$c(\sigma_i) = f(s_i, t_i).$$

Da f injektiv ist, gilt $c(s) = f(s,0) \notin W_0$ für $\delta \leq |s| < 2\delta$, also folgt $|\sigma_i| \geq 2\delta$. Durch Übergang zu Teilfolgen erhalten wir $\sigma_i \to \sigma \in [-L/2, L/2]\backslash(-2\delta, 2\delta)$, $s_i \to s \in [-\delta,\delta]$ und durch Grenzübergang

$$c(\sigma) = f(s,0) = c(s),$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass c einfach ist. Damit ist (3.2) gezeigt, und insbesondere gilt $C \cap W_0 = f((-\delta,\delta) \times \{0\})$. Es folgt $W_0\backslash C = W_0^+ \cup W_0^-$ für

$$W_0^+ = f\big((-\delta,\delta) \times (0,\varepsilon)\big) \quad \text{und} \quad W_0^- = f\big((-\delta,\delta) \times (-\varepsilon,0)\big).$$

Da f diffeomorph ist, ist $\partial W_0^{\pm}$ das Bild unter f von $\partial[(-\delta,\delta) \times (0, \pm\varepsilon)]$ bzw.

$$(\partial W^{\pm}_{s_0}) \cap W_{s_0} = f((-\delta,\delta) \times \{0\}) = C \cap W_0.$$

$\square$

Satz 3.4 (Jordanscher Kurvensatz) *Sei* $c \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ *eine einfach geschlossene Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert und* C^1*-geschlossen ist, und sei* $C = \mathrm{Bild}(c)$. *Dann ist* $\mathbb{R}^2\backslash C$ *disjunkte Vereinigung eines beschränkten Gebiets* U *und eines unbeschränkten Gebiets* V *mit* $\partial U = \partial V = C$.

Beweis: Wir nehmen wieder an, dass c als C^1-Kurve fortgesetzt ist mit Periode $L = |I|$. Für jede Komponente U von $\mathbb{R}^2\backslash C$ ist ∂U eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von C. Nach Lemma 3.2(1) gilt für $c(s_0) \in \partial U$ eine der Alternativen

$$U \cap W_{s_0} = W^+_{s_0} \quad \text{oder} \quad U \cap W_{s_0} = W^-_{s_0} \quad \text{oder} \quad U \cap W_{s_0} = W^+_{s_0} \cup W^-_{s_0}. \tag{3.3}$$

Mit Lemma 3.2(2) folgt $\partial U \cap W_{s_0} = C \cap W_{s_0}$, das heißt ∂U ist offen in C und somit $\partial U = C$, da C zusammenhängend ist. Insbesondere zeigt (3.3), dass $\mathbb{R}^2\backslash C$ höchstens zwei Komponenten besitzt. Wähle $R > 0$ mit $C \subset K_R(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq R\}$. Da $\mathbb{R}^2\backslash K_R(0)$ zusammenhängend ist, hat $\mathbb{R}^2\backslash C$ genau eine unbeschränkte Komponente V. Außerdem ist c homotop zur Punktkurve $c_0(s) \equiv 0$ in $K_R(0)$. Es folgt $n(c,p) = 0$ zunächst für $|p| > R$, und dann für alle $p \in V$ nach Folgerung 3.1. Der Satz ist also bewiesen, wenn wir zeigen:

Es gibt ein $q \in \mathbb{R}^2 \backslash C$ mit $n(c,q) \neq 0$.

Für $s_0 = 0$ sei $f|(-\delta,\delta)\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to W_0$ die in Lemma 3.2 definierte Abbildung. Betrachte für $0 < \varrho < \varepsilon$ die Punkte $p = c(0) = f(0,0)$, $p^\pm = f(0, \pm\varrho/2)$ sowie die Kurven

$$c^\pm(s) = \begin{cases} c(s) & \text{für } s \in [-L/2, L/2]\backslash[-\varrho,\varrho] \\ f\Big(\varrho \exp\big(\pm \frac{i\pi}{2}(1-\frac{s}{\varrho})\big)\Big) & \text{für } s \in [-\varrho,\varrho]. \end{cases}$$

Dabei sei $L > 0$ die Periode von c. Es folgt $n(c,p^\pm) = n(c^\mp, p^\pm)$, denn man hat die affine Homotopie, für $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$h^\mp(\lambda,s) = \begin{cases} c(s) & \text{für } s \in [-L/2, L/2]\backslash[-\varrho,\varrho] \\ f\Big((1-\lambda)\,(s,0) + \lambda\,\varrho \exp\big(\mp\frac{i\pi}{2}(1-\frac{s}{\varrho})\big)\Big) & \text{für } s \in [-\varrho,\varrho]. \end{cases}$$

Da p und $p^\pm$ in $f(B_\varrho(0))$ liegen und damit in derselben Komponente von $\mathbb{R}^2\backslash c^\pm(I)$, gilt weiter $n(c^\mp, p^\pm) = n(c^\mp, p)$ nach Folgerung 3.1. Also erhalten wir

$$n(c,p^+) - n(c,p^-) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_I \frac{(c^-)'}{c^- - p}\,ds - \int_I \frac{(c^+)'}{c^+ - p}\,ds\Big) = n(f\circ\gamma, p),$$

wobei $\gamma(t) = \varrho e^{it}$ für $t \in [-\pi,\pi]$. Aber man sieht leicht

$$n(f\circ\gamma,p) = n(F\circ\gamma,p) \qquad \text{für } F(z) = p + Df(0,0)z,$$

und zwar mit der affinen Homotopie $h(\lambda,t) = (1-\lambda)f(\gamma(t)) + \lambda F(\gamma(t))$, für $0 \leq \lambda \leq 1$. Nach Konstruktion in Lemma 3.2 ist $Df(0,0) \in \mathbb{O}(2)$, also folgt für $\varrho > 0$ hinreichend klein

$$\begin{aligned} |h(\lambda,t) - p| &= \big|F(\gamma(t)) - p + (1-\lambda)\big(f(\gamma(t)) - F(\gamma(t))\big)\big| \\ &\geq |Df(0,0)\gamma(t)| - \big|f(\gamma(t)) - F(\gamma(t))\big| \\ &\geq \varrho - \max_{|z|\leq\varrho} |f(z) - F(z)| > 0. \end{aligned}$$

Schließlich ist $F\circ\gamma$ ein einfach durchlaufener Kreis um p, und

$$n(c,p^+) - n(c,p^-) = n(f\circ\gamma,p) = n(F\circ\gamma,p) = \pm 1. \tag{3.4}$$

Da einer der Punkte $p^\pm$ in V liegt, folgt $n(c,p^+) = \pm 1$ oder $n(c,p^-) = \mp 1$. $\square$

4 Der Umlaufsatz von Hopf

Definition 4.1 (Rotationsindex) *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine C^1-geschlossene, reguläre Kurve. Dann heißt die Zahl* $\operatorname{ind}(c) = n(c',0) \in \mathbb{Z}$ *Rotationsindex (oder Tangentenumlaufzahl) von c.*

Sei $c \in C^2(I,\mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^1-geschlossen, und definiere die Krümmung $\varkappa$ bezüglich der Normalen $\nu(s) = ic'(s)$. Dann ergibt sich aus der Definition der Umlaufzahl als Kurvenintegral sowie den Frenetgleichungen

$$\text{(4.1)} \qquad \operatorname{ind}(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{c''(s)}{c'(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_I \varkappa(s)\,ds \qquad (\varkappa \text{ bezüglich } \nu = ic').$$

Lemma 4.1 (Invarianz des Rotationsindex) *Es gilt*

(a) $\operatorname{ind}(c\circ\varphi) = \operatorname{ind}(c)$ *für richtungstreue Umparametrisierungen* φ,

(b) $\operatorname{ind}(S\circ c) = (\det S)\operatorname{ind}(c)$ *für* $S \in \mathbb{O}(2)$.

Beweis: Sei $\varphi \in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ bijektiv mit $\varphi' > 0$. Die Abbildung $(c\circ\varphi)' : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist homotop zu $c'\circ\varphi$ durch

$$h : [\alpha,\beta]\times[0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\},\ h(t,\lambda) = \big(\lambda + (1-\lambda)\varphi'(t)\big)\,c'(\varphi(t)).$$

Aus der Homotopieinvarianz der Umlaufzahl sowie der Invarianz des Kurvenintegrals gegenüber C^1-Umparametrisierungen folgt

$$n((c\circ\varphi)',0) = n(c'\circ\varphi,0) = n(c',0).$$

Sei nun $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $\gamma(t) = (x(t),y(t))$, eine beliebige Kurve. Ist $\det S = 1$, so ist S mit der Einheitsmatrix in $\mathbb{O}(2)$ verbindbar und es folgt $n(S\cdot\gamma,0) = n(\gamma,0)$. Dagegen berechnen wir für $S^-(x,y) = (x,-y)$

$$n(S^-\cdot\gamma,0) = \int_I \frac{x(t)\big(-y'(t)\big) - \big(-y(t)\big)x'(t)}{x(t)^2 + \big(-y(t)\big)^2}\,dt = -n(\gamma,0).$$

Für $\det S = -1$ ist S verbindbar mit S^-, also gilt $n(S\cdot\gamma,0) = -n(\gamma,0)$. Mit $\gamma = c'$ folgt $n((S\cdot c)',0) = n(S\cdot c',0) = (\det S)\,n(c',0)$. □

Satz 4.1 (Umlaufsatz von H. Hopf) *Sei* $c \in C^1(I,\mathbb{R}^2)$ *reguläre, einfach* C^1-*geschlossene Kurve. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}(c) = \pm 1.$$

Beweis: Sei $c : I = [0,L] \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert und wie folgt normiert:

$$\begin{aligned} |c(0)| &= \max\nolimits_{s\in I}|c(s)| && \text{(Wahl der Bogenlängenparametrisierung)},\\ c(0) &\in \{(x,0) : x > 0\} && \text{(Drehung)},\\ c'(0) &= e_2 && \text{(Spiegelung an der } x\text{-Achse)}. \end{aligned}$$

Dir Idee von Hopf ist es, die Abbildung c' zu deformieren. Genauer wird auf der Menge $D = \{(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le s_1 \le s_2 \le L\}$ folgende Abbildung definiert:

$$\omega : D \to \mathbb{S}^1,\ \omega(s_1,s_2) = \begin{cases} c'(s) & \text{für } s_1 = s_2,\\ \dfrac{c(s_2)-c(s_1)}{|c(s_2)-c(s_1)|} & \text{für } 0 < s_2 - s_1 < L,\\ -c'(L) & \text{für } (s_1,s_2) = (0,L). \end{cases}$$

Nach Definition ist $\omega(s,s) = c'(s)$. Andererseits erhalten wir durch Entlanglaufen an den beiden anderen Kanten des Dreiecks die Kurve

$$\gamma : [0,L] \to \mathbb{S}^1,\ \gamma(s) = \begin{cases} \omega(0,2s) & \text{für } 0 \le s \le L/2, \\ \omega(2s-L,L) & \text{für } L/2 \le s \le L, \end{cases}$$

und wir haben

$$\gamma(s) = \begin{cases} c'(0) = e_2 & \text{für } s = 0, \\ \dfrac{c(2s)-c(0)}{|c(2s)-c(0)|} & \text{für } 0 < s < L/2, \\ -c'(0) & \text{für } s = L/2, \\ \dfrac{c(L)-c(2s-L)}{|c(L)-c(2s-L)|} & \text{für } L/2 < s < L, \\ c'(L) = e_2 & \text{für } s = L. \end{cases}$$

Zum Beweis des Satzes zeigen wir erst, dass c' in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ homotop zu γ ist, und berechnen dann $n(\gamma,0) = 1$. Zunächst ist ω wohldefiniert, da c einfach geschlossen ist. Längs der Diagonale $\{(s,s) : 0 \le s \le L\}$ ist ω stetig, denn für $s_1, s_2 \to s$ mit $s_1 < s_2$ gilt

$$\frac{c(s_2)-c(s_1)}{s_2-s_1} = \frac{1}{s_2-s_1}\int_{s_1}^{s_2} c'(t)\,dt \to c'(s),$$

und folglich (beachte $|c'(s)| = 1$)

$$\frac{c(s_2)-c(s_1)}{|c(s_2)-c(s_1)|} = \frac{c(s_2)-c(s_1)}{s_2-s_1}\,\frac{s_2-s_1}{|c(s_2)-c(s_1)|} \to c'(s).$$

In $(0,L)$ ist ω ebenfalls stetig, denn für $s_1 \searrow 0$, $s_2 \nearrow L$ gilt, wenn wir c periodisch fortsetzen,

$$\frac{c(s_2)-c(s_1)}{s_1+L-s_2} = -\frac{1}{s_1+L-s_2}\int_{s_2}^{s_1+L} c'(t)\,dt \to -c'(L).$$

Wir können dann analog argumentieren. Wir erhalten nun eine Homotopie von c' nach γ durch $h(\lambda,s) = \omega(F(\lambda,s))$, indem wir erst $f : [0,1] \to D$, $f(\lambda) = (1-\lambda)(L/2,L/2) + \lambda(0,L)$ setzen und dann $F : [0,1]\times[0,L] \to D$ wie folgt definieren (vgl. Bild):

$$F(\lambda,s) = \begin{cases} \frac{2s}{L}\,f(\lambda) & \text{für } 0 \le s \le L/2, \\ (\frac{2s}{L}-1)\,(L,L) + 2(1-\frac{s}{L})\,f(\lambda) & \text{für } L/2 \le s \le L. \end{cases}$$

Es bleibt, die Umlaufzahl $n(\gamma,0)$ zu berechnen. Aus den Normierungen ergibt sich

$$\langle\gamma(s),e_1\rangle \begin{cases} \le 0 & \text{für } 0 \le s \le L/2, \\ \ge 0 & \text{für } L/2 \le s \le L. \end{cases}$$

Die Winkelform ω hat auf der rechten bzw. linken Halbebene folgende Stammfunktionen

$$\theta^{\pm}(x,y) = \begin{cases} \arcsin\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{für } x \ge 0 \\ -\arcsin\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{für } x \le 0. \end{cases}$$

Indem wir die Kurvenintegrale von $s = 0$ bis $s = L/2$ sowie von $s = L/2$ bis $s = L$ einzeln auswerten, folgt

$$2\pi\, n(\gamma, 0) = \theta^-(0,-1) - \theta^-(0,1) + \theta^+(0,1) - \theta^+(0,-1) = 2\pi,$$

womit der Satz bewiesen ist. $\square$

In Kapitel 11 tritt ein Fall auf, wo das Vorzeichen des Index gebraucht wird. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit glattem zusammenhängenden Rand und innerer Normale ν. Es sei $c : [0, L] \to \partial D$ die Parametrisierung nach der Bogenlänge, für die c', $\nu \circ c$ positiv orientiert ist. Wir behaupten

$$\text{(4.2)} \qquad \operatorname{ind}(c) = 1.$$

Durch richtungstreue Umparametrisierung und Drehung ist

$$|c(0)| = \max_{s \in [0,L]} |c(s)| \quad \text{und} \quad c(0) = (a, 0) \text{ für ein } a > 0.$$

Der Index ändert sich unter diesen Normierungen nicht, siehe Lemma 4.1. Nun liegt D in der Halbebene $\{x \leq a\}$, also gilt $\nu(a, 0) = -e_1$ und damit $c'(0) = e_2$. Die dritte Normierung im Umlaufsatz gilt also ohne Spiegelung, und es folgt $\operatorname{ind}(c) = 1$ wie behauptet.

Für einfach geschlossene Kurven, deren Krümmung bezüglich der inneren Normalen nichtneagtiv ist, können wir nun das Innengebiet genauer charakterisieren, und zwar ist das Innengebiet dann konvex als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Bekanntlich bedeutet das, mit je zwei Punkten enthält das Gebiet auch die Verbindungsstrecke der Punkte. Wir beginnen mit einer Standardaussage für konvexe Mengen, nämlich der Existenz von Stützhalbebenen.

Lemma 4.2 *Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und konvex. Dann gibt es zu jedem $p \in \partial A$ eine affine Halbebene $H = \{q \in \mathbb{R}^2 : \langle q - p, v\rangle \geq 0\}$, so dass $A \subset H$ und $p \in \partial A$.*

Beweis: Zu $q \in \mathbb{R}^2 \backslash A$ gibt es ein $p \in \partial A$ mit $|p - q| = \min_{x \in A} |x - q|$. Für alle $x \in A$ folgt

$$0 \leq \frac{d}{dt} |(1-t)p + tx - q|\big|_{t=0+} = \Big\langle \frac{p-q}{|p-q|}, x - p \Big\rangle.$$

Also gilt $A \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - p, v\rangle \geq 0\}$ mit $v = \frac{p-q}{|p-q|}$. Sei nun $p \in \partial A$ gegeben. Wähle eine Folge $q_k \in \mathbb{R}^2 \backslash A$ mit $q_k \to p$, und bestimme $p_k \in \partial A$ mit $|p_k - q_k| = \min_{x \in A} |x - q_k|$ wie oben. Dann folgt $|p_k - p| \leq |p_k - q_k| + |q_k - p| \leq 2|q_k - p| \to 0$, und

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - p_k, v_k\rangle \geq 0\} \quad \text{mit } v_k = \frac{p_k - q_k}{|p_k - q_k|}.$$

Nach Wahl einer Teilfolge existiert $v = \lim_{k \to \infty} v_k$, und die Behauptung ist bewiesen mit $H = A \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - p, v\rangle \geq 0\}$. $\square$

Lemma 4.3 *Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^1-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Innengebiet U und innerer Normale ν längs c. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Das Innengebiet U von c ist konvex.*

(2) *Für alle $s \in [0, L]$ gilt* $\mathrm{Bild}(c) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - c(s), \nu(s)\rangle \geq 0\} =: H(s)$.

Beweis: Sei U konvex und $s_0 \in [0, L]$. Da $c(s_0) \in \partial U$, gibt es eine Halbebene $H = \{q \in \mathbb{R}^2 : \langle q - c(s_0), v\rangle \geq 0\}$, so dass $U \subset H$ und $c(s_0) \in \partial H$. Dies folgt leicht aus Lemma 4.2. Wir zeigen $H(s_0) = H$, daraus folgt (2). Betrachte dazu die Funktion $\varphi(s) = \langle c(s) - c(s_0), v\rangle$. In $s = s_0$ hat φ ein Minimum, folglich ist $0 = \varphi'(s_0) = \langle c'(s_0), v\rangle$. Wegen $U \subset H$ muss v die innere Normale $\nu(s_0)$ sein, also gilt $H(s_0) = H$.

Aus (2) folgt sofort $\overline{U} \subset H(s)$ für alle $s \in [0, L]$. Sei umgekehrt $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \overline{U}$. Wähle $s_0 \in [0, L]$ mit $|c(s_0) - p| = \min_{s \in [0,L]} |c(s) - p| =: d > 0$. Es folgt $p - c(s_0) \perp c'(s_0)$ beziehungsweise $p = c(s_0) \pm d\,\nu(s_0)$. Die Strecke von $c(s_0)$ nach p enthält keine Punkte der Kurve c. Wegen $p \notin \overline{U}$ liegt die Strecke ganz im Außengebiet von c, deshalb ist $p = c(s_0) - d\nu(s_0)$, das heißt $p \notin H(s_0)$. Somit gilt $\overline{U} = \bigcap_{s \in [0,L]} H(s)$, insbesondere ist $\overline{U}$ und damit $U = \mathrm{int}(\overline{U})$ konvex. $\square$

Satz 4.2 (Charakterisierung konvexer Kurven) *Sei $c : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^2-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Innengebiet U. Dann sind äquivalent:*

(1) *c hat Krümmung $\varkappa \geq 0$ bezüglich der inneren Normalen ν.*

(2) *U ist konvex.*

Beweis: Nach Umparametrisierung können wir annehmen, dass die innere Normale durch $\nu = ic'$ gegeben ist. Ist U konvex, so ist die Funktion $\varphi(s) = \langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle$ nichtnegativ für alle $s_0 \in [0, L]$ nach Lemma 4.3. Es folgt

$$0 \leq \varphi''(s_0) = \langle c''(s_0), \nu(s_0)\rangle = \varkappa(s_0).$$

Sei umgekehrt $\varkappa \geq 0$. Wir behaupten: ist $c'(s_0) = c'(s_1)$ für $0 \leq s_0 < s_1 < L$, so gilt $c(s_1) - c(s_0) \perp \nu(s_0)$. Sei dazu nach Umparametrisierung $s_0 = 0$. Es gilt

$$n(c'|_{[0,s_1]}, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_1} \varkappa\, ds \geq 0 \quad \text{und} \quad n(c'|_{[s_1,L]}, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_1}^{L} \varkappa\, ds \geq 0.$$

Andererseits liefert der Umlaufsatz von Hopf

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^L \varkappa\, ds = \mathrm{ind}\,(c) = \pm 1.$$

Also ist $\varkappa(s)$ gleich Null auf $[0, s_1]$ oder auf $[s_1, L]$. Auf diesem Intervall ist dann $c'(s) = c'(s_0)$, also $c(s_1) - c(s_0) \perp \nu(s_0)$ wie behauptet.

Sei nun $s_0 \in [0, L)$ beliebig, und $\varphi(s) = \langle c(s), v\rangle$ mit $v = \nu(s_0)$. Setze $\alpha = \min \varphi$ und $\beta = \max \varphi$, und wähle $s_1, s_2 \in [0, L]$ mit $\varphi(s_1) = \alpha$ und $\varphi(s_2) = \beta$. Es folgt $\varphi'(s_1) = \varphi'(s_2) = 0$, das heißt

$$\langle c'(s_0), v\rangle = \langle c'(s_1), v\rangle = \langle c'(s_2), v\rangle = 0.$$

Mindestens zwei der Vektoren $c'(s_i)$, $i = 0, 1, 2$, sind gleich. Wie gezeigt sind dann auch mindestens zwei der Funktionswerte $\varphi(s_i)$ gleich. Nun ist $v = \nu(s_0)$

innere Normale, also ist $U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x - c(s_0), v\rangle > 0\}$ nichtleer, und folglich $\varphi(s_2) = \beta > \varphi(s_0)$. Da $\varphi(s_1) = \alpha \leq \varphi(s_0)$, muss $\varphi(s_1) = \varphi(s_0)$ gelten. Das bedeutet aber $\langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle \geq 0$ für alle $s \in [0, L]$, und nach Lemma 4.3 ist U konvex. $\square$

5 Vierscheitel-Satz und isoperimetrische Ungleichung

In diesem Abschnitt diskutieren wir zwei weitere Sätze für ebene Kurven, die isoperimetrische Ungleichung und den Vierscheitel-Satz. Vor allem die isoperimetrische Ungleichung hat fundamentale Bedeutung. Unser Beweis der isoperimetrischen Ungleichung folgt einer Arbeit von F. Hélein, siehe *Annales de l'Institut Fourier* **44** (1994), 1211-1218. Dafür brauchen wir den Integralsatz von Gauß.

Satz 5.1 (Integralsatz von Gauß) *Sei $c \in C^1([0,L], \mathbb{R}^2)$ einfach C^1-geschlossen und nach der Bogenlänge parametrisiert. Ist U das Innengebiet von c und $X \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^2)$, so gilt*

$$\int_U \operatorname{div} X \, dx = -\int_{\partial U} \langle X, \nu\rangle \, ds.$$

Dabei ist $\nu : \partial U \to \mathbb{S}^1$ die innere Normale.

Das Randintegral für eine Funktion $f : \partial U \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_{\partial U} f(x) \, ds(x) := \int_0^L f\big(c(s)\big) \, ds,$$

wobei c eine Parametrisierung von ∂U nach der Bogenlänge ist.

Satz 5.2 (Isoperimetrische Ungleichung) *Sei $c : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^1-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann gilt für den Flächeninhalt A des Innengebiets U von c*

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2,$$

mit Gleichheit genau wenn c ein Kreis ist.

Beweis: Wir berechnen für $x \in U$

$$(c_1(s) - x_1)c_2'(s) - (c_2(s) - x_2)c_1'(s) = \langle x - c(s), ic'(s)\rangle.$$

Nach Beweis des Jordanschen Kurvensatzes folgt bei geeigneter Wahl von $\nu(y)$

$$1 = |n(c,x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} \frac{\langle x - y, \nu(y)\rangle}{|x - y|^2} \, ds(y).$$

Bezeichne für $x \neq 0$ mit $R(x)$ die Spiegelung an der Geraden $\{x\}^\perp$, also

$$R(x)v = v - 2\Big\langle \frac{x}{|x|}, v\Big\rangle \frac{x}{|x|} \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2.$$

Für feste $y, v \in \mathbb{R}^2$ berechnen wir, für alle $x \neq y$,

$$\mathrm{div}_x R(x-y)v = -2\mathrm{div}_x\Big(\langle x-y, v\rangle \frac{x-y}{|x-y|^2}\Big) = -2\Big\langle \frac{x-y}{|x-y|^2}, v\Big\rangle.$$

Mit Fubini, dem Satz von Gauß und Cauchy-Schwarz folgt

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2\pi}\int_U \int_{\partial U} \frac{\langle x-y, \nu(y)\rangle}{|x-y|^2}\, ds(y)\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial U} \int_U \frac{\langle x-y, \nu(y)\rangle}{|x-y|^2}\, dx\, ds(y) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial U} \int_U \mathrm{div}_x R(x-y)\nu(y)\, dx\, ds(y) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial U} \int_{\partial U} \langle R(x-y)\nu(y), \nu(x)\rangle\, ds(x)\, ds(y) \\
&\leq \frac{1}{4\pi}\int_{\partial U} \int_{\partial U} ds(x)\, ds(y) = \frac{1}{4\pi}L^2.
\end{aligned}$$

Bei Gleichheit ist $\nu(x) = R(x-y)\nu(y)$ für alle $x, y \in \partial U$ mit $x \neq y$. Sei etwa $y = 0$ und $\nu(0) = (0,1)$ nach Drehung. Dann folgt

$$c'(s) = \pm i R(c(s))(0,1) \qquad \text{für alle } c(s) \neq 0.$$

Diese Differentialgleichung wird von allen Kreisen gelöst, die die x-Achse im Nullpunkt berühren. Nach Eindeutigkeitssatz muss c einer dieser Kreise sein. □

Ein technischer Punkt bleibt noch nachzutragen: bei der Anwendung des Satzes von Gauß hat das Vektorfeld $X(x)$ am Punkt $x = y \in \partial U$ eine Singularität, denn es gilt

$$X(x) = R(x-y)\nu(y) = \nu(y) - 2\Big\langle \frac{x-y}{|x-y|}, \nu(y)\Big\rangle \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Um den Schritt zu rechtfertigen, wählen wir eine Abschneidefunktion $\eta_\varrho \in C^\infty(B_\varrho(y))$ mit $0 \leq \eta_\varrho \leq 1$ und $|D\eta_\varrho| \leq C/\varrho$. Es gilt

$$\mathrm{div}\,(\eta_\varrho X) = \eta_\varrho \mathrm{div}\, X + \langle \nabla \eta_\varrho, X\rangle.$$

Jetzt wenden wir den Satz von Gauß an und lassen $\varrho \searrow 0$ gehen.

Die isoperimetrische Ungleichung gilt auch für allgemeinere Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$. Ist zum Beispiel U beschränkt mit C^1-Rand, so kann man zeigen dass

$$U = U_0 \backslash \bigcup_{i=1}^k \overline{U_i},$$

wobei die U_i durch einfach C^1-geschlossene Kurven c_i berandet sind. Es folgt $L(\partial U) \geq L(\partial U_0)$ und $A(U) \leq A(U_0)$. Somit gilt die isoperimetrische Ungleichung erst recht für U.

Satz 5.3 (Vierscheitel-Satz für konvexe Kurven) *Sei $\gamma : I = [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^3-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte, konvexe Kurve. Dann hat die Funktion $\varkappa'$ mindestens vier verschiedene Nullstellen.*

Beweis: Die Nullstellen von $\varkappa'$ werden auch als Scheitel bezeichnet. Wir können annehmen, dass $\varkappa$ in $s_0 = 0$ sein Minimum annimmt und in $s_1 \in (0, L)$ sein Maximum, dies sind also mal zwei Scheitel. Nach Translation und Drehung liegen $\gamma(0)$ und $\gamma(s_1)$ auf der x-Achse. Angenommen für ein $s \in [0, L]$ ist $\gamma(s)$ auf der x-Achse und $\gamma'(s) = \pm e_1$, das heißt die x-Achse ist Tangente der Kurve. Nach Definition der Konvexität folgt $\gamma(I) \subset H$, wobei H die abgeschlossene obere oder untere Halbebene ist. Ist U das Innengebiet von γ, so folgt weiter

$$\gamma(I) \cap \partial H = \partial U \cap \partial H = \overline{U} \cap \partial H,$$

das heißt $\gamma(I) \cap \partial H$ ist eine Strecke. Damit ist $\gamma([0, s_1]) \subset \partial H$ oder $\gamma([s_1, L]) \subset \partial H$, insbesondere $\varkappa(0) = \varkappa(s_1) = 0$. Aber das heißt $\varkappa \equiv 0$ und γ ist eine Gerade, Widerspruch.

Sei jetzt nach evtl. Spiegelung $\langle \gamma'(0), e_2 \rangle < 0$. Angenommen, $\gamma(s_2)$ liegt auf der x-Achse für ein $s_2 \in (0, s_1)$, Dann haben wir drei Punkte $\gamma(\sigma_\nu)$ auf der x-Achse, nämlich $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \{0, s_1, s_2\}$, mit $\langle \gamma(\sigma_1), e_1 \rangle < \langle \gamma(\sigma_2), e_1 \rangle < \langle \gamma(\sigma_3), e_1 \rangle$; hier verwenden wir, dass γ einfach ist. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle \nu(\sigma_2), \gamma(\sigma_3) - \gamma(\sigma_2) \rangle &= -\underbrace{\langle \gamma'(\sigma_2), e_2 \rangle}_{\neq 0} \underbrace{\langle \gamma(\sigma_3) - \gamma(\sigma_2), e_1 \rangle}_{>0}, \\
\langle \nu(\sigma_2), \gamma(\sigma_1) - \gamma(\sigma_2) \rangle &= -\underbrace{\langle \gamma'(\sigma_2), e_2 \rangle}_{\neq 0} \underbrace{\langle \gamma(\sigma_1) - \gamma(\sigma_2), e_1 \rangle}_{<0},
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Konvexität. Wir können also annehmen, dass $\langle \gamma, e_2 \rangle < 0$ ist auf $(0, s_1)$, und analog $\langle \gamma, e_2 \rangle > 0$ auf (s_1, L). Ist nun $\varkappa$ monoton nichtfallend auf $[0, s_1]$ und monoton nichtwachsend auf $[s_1, L]$, so folgt

$$0 \geq \int_0^L \varkappa' \langle \gamma(s), e_2 \rangle \, ds = \Big[\varkappa(s) \langle \gamma(s), e_2 \rangle \Big]_{s=0}^{s=L} - \int_0^L \varkappa \langle \gamma'(s), e_2 \rangle \, ds = \int_0^L \langle \nu'(s), e_2 \rangle \, ds = 0.$$

Aus der Diskussion des Vorzeichens von $\langle \gamma, e_2 \rangle$ ergibt sich $\varkappa' \equiv 0$, das heißt γ ist ein Kreis. Ist aber zum Beispiel $\varkappa$ *nicht* monoton nichtfallend auf $[0, s_1]$, so gibt es $0 \leq s_2 < s_3 \leq s_1$ mit $\varkappa(s_2) > \varkappa(s_3)$, also insbesondere $s_2 > 0$ und $s_3 < s_1$. Aber dann nimmt $\varkappa$ in $[0, s_3]$ ein (lokales) Maximum und in $[s_2, s_1]$ ein (lokales) Minimum an. Wir haben also sogar bewiesen, dass $\varkappa$ mindestens zwei lokale Maxima und zwei lokale Minima hat. □

Der Vierscheitel-Satz gilt auch für nichtkonvexe Kurven. Eine Standardreferenz ist R. Osserman, The four-or-more vertex theorem, *American Mathematical Monthly* **92** (1985), 332–337.

6 Die erste Fundamentalform einer Fläche

Unsere Darstellung der Flächentheorie geht von Flächen aus, die durch eine Parameterdarstellung auf einem zweidimensionalen Gebiet gegeben sind. Lokal ist das natürlich für jede Fläche der Fall. Gegenüber der Auffassung von Flächen als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ hat der parametrische Zugang den Vorteil, dass die zentralen Größen wie die erste und zweite Fundamentalform auf dem Parametergebiet definiert sind; dies bereitet den Umgang mit Riemannschen Metriken und allgemeiner Tensoren bei abstrakten Mannigfaltigkeiten vor. Auf der anderen Seite knüpft die Sichtweise direkt an die Kurventheorie an.

Definition 6.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $k \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}$. Eine Abbildung $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$ heißt (regulär parametrisierte) Fläche oder zweidimensionale Immersion der Klasse C^k, falls gilt:*

$$\operatorname{rang} DF(x) = 2 \quad \text{für alle } x = (x^1, x^2) \in U.$$

Mit anderen Worten, die Vektoren $\partial_1 F(x)$ und $\partial_2 F(x)$ sind linear unabhängig für alle $x \in U$.

Der zweidimensionale Unterraum

$$\operatorname{Bild} DF(x) = \operatorname{Span}\{\partial_1 F(x), \partial_2 F(x)\} \tag{6.1}$$

heißt Tangentialraum von F im Punkt x. Der *affine* Tangentialraum ist $F(x) + \operatorname{Bild} DF(x)$. Die Abbildung F wird nicht als injektiv vorausgesetzt, das heißt die Fläche darf sich selbst durchdringen. Es macht dann keinen Sinn, vom Tangentialraum im Punkt $p \in \operatorname{Bild} F$ zu reden. Eine stetige Abbildung $N : U \to \mathbb{R}^3$ heißt Einheitsnormale längs F, falls

$$|N(x)| = 1 \quad \text{und} \quad N(x) \perp \operatorname{Bild} DF(x) \quad \text{für alle } x \in U. \tag{6.2}$$

Für Einheitsnormalen $N_{1,2}$ längs F ist $\langle N_1, N_2 \rangle \in \{\pm 1\}$. Ist U zusammenhängend, so gibt daher genau zwei Einheitsnormalen längs F, nämlich

$$N^{\pm} : U \to \mathbb{S}^2,\ N^{\pm}(x) = \pm \frac{\partial_1 F(x) \times \partial_2 F(x)}{|\partial_1 F(x) \times \partial_2 F(x)|}.$$

Insbesondere ist für $F \in C^k$ jede Einheitsnormale von der Klasse C^{k-1}.

Beispiel 6.1 (Graphen) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Der Graph einer reellwertigen Funktion $f \in C^k(U)$, $f = f(x, y)$, ist die parametrisierte Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Es folgt, wenn wir die partiellen Anleitungen mit f_x und f_y bezeichnen,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\operatorname{rang} DF(x, y) = 2$. Wir berechnen

$$F_x \times F_y = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1) = (-Df, 1),$$

also erhalten wir die Einheistnormale

$$N = \frac{(-Df,1)}{\sqrt{1+|Df|^2}} : U \to \mathbb{S}^2. \tag{6.3}$$

Definition 6.2 (erste Fundamentalform) *Sei $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann heißt die von $x \in U$ abhängige Bilinearform*

$$g(x)(v,w) = \langle DF(x)v, DF(x)w\rangle \quad (v,w \in \mathbb{R}^2)$$

erste Fundamentalform von F. Bezüglich der Standardbasis $\{e_1,e_2\}$ hat g die Koeffizienten

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R},\ g_{ij}(x) = \langle \partial_i F(x), \partial_j F(x)\rangle \quad (1 \le i,j \le 2).$$

Die zugehörige Matrix bezeichnen wir mit

$$G : U \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ G(x) = DF(x)^{\mathrm{T}} DF(x) = \big(g_{ij}(x)\big)_{1\le i,j\le 2}.$$

Für jedes $x \in U$ ist $g(x)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, denn es gilt:

- $g(x)$ ist symmetrisch:

  $$g(x)(v,w) = \langle DF(x)v, DF(x)w\rangle = \langle DF(x)w, DF(x)v\rangle = g(x)(w,v).$$

  Äquivalent dazu ist die Symmetrie der Matrix G, also $g_{ij} = g_{ji}$.

- $g(x)$ ist bilinear:

  $$\begin{aligned} g(x)(\alpha v_1 + \beta v_2, w) &= \langle DF(x)(\alpha v_1 + \beta v_2), DF(x)w\rangle \\ &= \alpha \langle DF(x)v_1, DF(x)w\rangle + \beta \langle DF(x)v_2, DF(x)w\rangle \\ &= \alpha\, g(x)(v_1,w) + \beta\, g(x)(v_2,w). \end{aligned}$$

  Die Linearität in der zweiten Komponente folgt wegen der Symmetrie.

- $g(x)$ ist positiv definit:

  $$g(x)(v,v) = \langle DF(x)v, DF(x)v\rangle = |DF(x)v|^2 \ge 0.$$

  Bei Gleichheit folgt $DF(x)v = 0$ und hieraus $v = 0$, denn für $DF(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gilt nach Voraussetzung $\dim\ker DF(x) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Bild} DF(x) = 0$.

Die Abbildung $DF(x) : \big(\mathbb{R}^2, g(x)\big) \to (\operatorname{Bild} DF(x), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ ist eine Isometrie zwischen (zweidimensionalen) Euklidischen Vektorräumen, denn es gilt nach Definition

$$|DF(x)v| = \sqrt{g(x)(v,v)} = \|v\|_{g(x)}. \tag{6.4}$$

Ein Skalarprodukt, das von $x \in U$ abhängt, nennt man Riemannsche Metrik auf U; dabei wird die Abhängigkeit von $x \in U$ in der Notation oft ignoriert, das heißt man schreibt oft $g(v,v)$ für die Funktion $x \mapsto g(x)(v,v)$.

Lemma 6.1 (Bogenlänge auf Flächen) *Sei $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann gilt für jede Kurve $\gamma \in C^1(I,U)$*

$$L(F\circ\gamma) = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))}\,dt.$$

Beweis: Aus (6.4) folgt

$$L(F\circ\gamma) = \int_I |(F\circ\gamma)'(t)|\,dt = \int_I |DF(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt.$$

□

Beispiel 6.2 (Erste Fundamentalform von Graphen) Für eine als Graph gegebene Fläche $F: U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ folgt für die erste Fundamentalform

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.3 (Rotationsflächen) Sei $c:(a,b)\to\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$, $c(t) = (r(t),h(t))$ eine reguläre Kurve. Durch Rotation um die z-Achse erhalten wir die Fläche

$$F:(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ F(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$DF(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ h'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die erste Fundamentalform folgt

$$G(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)^2 + h'(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Da $r(t) > 0$ und $c'(t) \neq 0$ nach Voraussetzung, gilt

$$\det G(t,\varphi) = r(t)^2\big(r'(t)^2 + h'(t)^2\big) > 0.$$

Also ist $\operatorname{rang} DF(t,\varphi)^{\mathrm{T}} DF(t,\varphi) = 2$, und F ist eine Immersion.

Lemma 6.2 (Winkel zwischen Tangentialvektoren) *Sei $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Der Winkel zwischen den Vektoren $DF(x)v_1$ und $DF(x)v_2$ ist*

$$\angle(DF(x)v_1, DF(x)v_2) = \arccos\frac{g(x)(v_1,v_2)}{\|v_1\|_{g(x)}\,\|v_2\|_{g(x)}} =: \angle_{g(x)}(v_1,v_2).$$

BEWEIS: Wir berechnen mit (6.4)

$$\angle\big(DF(x)v_1, DF(x)v_2\big) = \arccos \frac{\langle DF(x)v_1, DF(x)v_2\rangle}{|DF(x)v_1|\,|DF(x)v_2|} = \arccos \frac{g(x)(v_1,v_2)}{\|v_1\|_{g(x)}\|v_2\|_{g(x)}}.$$

$\square$

Als nächstes wollen wir den Flächeninhalt einer Immersion definieren. Zur Motivation betrachten wir für Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ den Flächeninhalt $A(v_1,v_2)$ des von ihnen aufgespannten Parallelogramms. Wir behaupten

$$A(v_1,v_2) = \sqrt{|v_1|^2|v_2|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}.$$

Wähle dazu $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ orthonormal mit $v_1 = \alpha e_1$ und $v_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$, und berechne

$$A(v_1,v_2) = A(\alpha e_1, \beta e_1 + \gamma e_2) = A(\alpha e_1, \gamma e_2) = |\alpha\gamma| = \sqrt{|v_1|^2|v_2|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2}.$$

Ist nun $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, so folgt

$$A(\partial_1 F, \partial_2 F) = \sqrt{|\partial_1 F|^2|\partial_2 F|^2 - \langle \partial_1 F, \partial_2 F\rangle} = \sqrt{\det G}.$$

Es sollte daher gelten

$$dA = A(F_x, F_y)\,dxdy = \sqrt{\det G}\,dxdy.$$

Definition 6.3 *Der Flächeninhalt einer Immersion $F : U \to \mathbb{R}^3$ ist*

$$A(F) = \int_U \sqrt{\det G} =: A_g(U),$$

wobei $G : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix der ersten Fundamentalform von F ist.

Beispiel 6.4 Für einen Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ erhalten wir

$$A(F) = \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \int_U \sqrt{1 + |Df|^2}.$$

Beispiel 6.5 Für den Flächeninhalt einer Rotationsfläche

$$F : (a,b) \times (\varphi_1, \varphi_2) \to \mathbb{R}^3,\ F(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$$

ergibt sich die Guldinsche Formel

$$A(F) = (\varphi_2 - \varphi_1)\int_a^b r\sqrt{(r')^2 + (h')^2}.$$

Wir kommen nun, analog zu unserer Diskussion bei Kurven, zu Umparametrisierungen.

Definition 6.4 *Seien $F : U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{F} : V \to \mathbb{R}^3$ Flächen der Klasse C^1. Dann heißt $\tilde{F}$ Umparametrisierung von F, falls es einen C^1-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$ gibt mit*

$$\tilde{F} = F \circ \phi.$$

Auf der Menge aller parametrisierten C^1-Flächen ist die Relation

$$F \sim \tilde{F} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{F} \text{ ist Umparametrisierung von } F$$

eine Äquivalenzrelation. Der Diffeomorphismus ϕ ist nicht eindeutig bestimmt, zum Beispiel gilt für eine Rotationsfläche trivialerweise $F = F \circ \mathrm{id}$, aber natürlich auch $F = F \circ \tau_k$ für $\tau_k(t, \varphi) = (t, \varphi + 2k\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 6.1 (Transformationsverhalten von g) *Sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche.*

(1) *Ist $\tilde{F} \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ eine Umparametrisierung von F, also $\tilde{F} = F \circ \phi$ mit einem C^1-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$, so gilt für die zugehörigen ersten Fundamentalformen $\tilde{g}(v, w) = g \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w)$ bzw. äquivalent*

$$\tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\,D\phi \qquad \textit{oder} \qquad \tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} g_{kl} \circ \phi\, \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l.$$

(2) *Ist $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Euklidische Bewegung und $\tilde{F} = B \circ F$, so folgt $\tilde{g} = g$.*

Beweis: In der Situation von (1) berechnen wir

$$\begin{aligned} \tilde{g}(v, w) &= \langle D(F \circ \phi) \cdot v, D(F \circ \phi) \cdot w \rangle \\ &= \langle (DF) \circ \phi\, D\phi \cdot v, (DF) \circ \phi\, D\phi \cdot w \rangle \\ &= g \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w). \end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}(e_i, e_j) = (g \circ \phi)(\partial_i \phi, \partial_j \phi) = \sum_{k,l=1}^{2} (g_{kl} \circ \phi) \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l.$$

Die Formel für die Matrix ergibt sich alternativ wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= D(F \circ \phi)^{\mathrm{T}} D(F \circ \phi) \\ &= \big((DF) \circ \phi\, D\phi\big)^{\mathrm{T}} (DF) \circ \phi\, D\phi \\ &= D\phi^{\mathrm{T}} \big(DF^{\mathrm{T}} DF\big) \circ \phi\, D\phi \\ &= D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\,D\phi. \end{aligned}$$

Für Behauptung (2) beachten wir $B(y) = Sy + a$ mit $S \in \mathbb{O}(3)$ und $a \in \mathbb{R}^3$, siehe Satz 0.1, also $DB(y) = S$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ und

$$\tilde{g}(x)(v, w) = \langle D(B \circ F)(x)v, D(B \circ F)(x)w \rangle = \langle S\,DF(x)v, S\,DF(x)w \rangle = g(x)(v, w).$$

□

Wir wollen überprüfen, ob die definierten Begriffe Bogenlänge, Winkel und Flächeninhalt unabhängig von der Wahl der Parametrisierung sind. Interessanterweise können wir diese Invarianz allein aus der Transformationsformel für die erste Fundamentalform herleiten, ohne auf die Fläche F direkt Bezug zu nehmen.

Folgerung 6.1 *Sei $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $\tilde{F} = F \circ \phi$ eine Umparametrisierung mit einem Diffeomorphismus $\phi \in C^1(V,U)$. Sind g bzw. $\tilde{g}$ die zugehörigen ersten Fundamentalformen, so gelten folgende Aussagen:*

(1) $L_g(\phi \circ \gamma) = L_{\tilde{g}}(\gamma)$ *für* $\gamma : I \to V$,

(2) $\angle_{g(\phi(x))}(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \angle_{\tilde{g}(x)}(v,w)$ *für* $x \in V$ *und* $v,w \in \mathbb{R}^2$,

(3) $A_g(\phi(E)) = A_{\tilde{g}}(E)$ *für* $E \subset V$.

Beweis: Nach Satz 6.1 gilt $g(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \tilde{g}(v,w)$, also

$$\|D\phi(x)v\|_{g(\phi(x))} = \|v\|_{\tilde{g}(x)} \quad \text{und} \quad \angle_{g(\phi(x))}(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = \angle_{\tilde{g}(x)}(v,w).$$

Mit $(\phi \circ \gamma)'(t) = D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)$ folgt weiter

$$L_g(\phi \circ \gamma) = \int_I \|D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\|_{g(\phi(\gamma(t)))}\, dt = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\tilde{g}(\gamma(t))}\, dt = L_{\tilde{g}}(\gamma).$$

Schließlich liefert der Transformationssatz und Satz 6.1

$$\begin{aligned} A_g(\phi(E)) &= \int_{\phi(E)} \sqrt{\det G} \\ &= \int_E \sqrt{\det G} \circ \phi |\det D\phi| \\ &= \int_E \sqrt{\det\left(D\phi^{\mathrm{T}}(G \circ \phi) D\phi\right)} \\ &= A_{\tilde{g}}(E). \end{aligned}$$

□

Ein zentrales Hilfsmittel der Kurventheorie war die Umparametrisierung nach der Bogenlänge. Es stellt sich die Frage, ob es für Flächen $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ ebenfalls besonders günstige und natürliche Parametrisierungen gibt. Folgende drei Möglichkeiten werden durch unsere bisherige Diskussion nahegelegt:

(1) F heißt längentreu parametrisiert, falls $L(F \circ \gamma) = L_{\mathbb{R}^2}(\gamma)$ für alle Kurven $\gamma : I \to U$.

(2) F heißt flächentreu parametrisiert, falls $A(F|_V) = A_{\mathbb{R}^2}(V)$ für alle Mengen $V \subset U$.

(3) F heißt winkeltreu (oder konform) parametrisiert, falls $\angle(DF \cdot v, DF \cdot w) = \angle_{\mathbb{R}^2}(v,w)$ für alle $x \in U$ und alle $v,w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Diese drei Eigenschaften lassen sich in Bedingungen für die erste Fundamentalform g übersetzen, und zwar wie folgt:

Lemma 6.3 *Für eine regulär parametrisierte Fläche $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ mit erster Fundamentalform $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ gelten folgende Aussagen:*

(1) *F ist längentreu* $\Leftrightarrow$ $G = (\delta_{ij})$,

(2) *F ist flächentreu* $\Leftrightarrow$ $\det G = 1$,

(3) *F ist winkeltreu* $\Leftrightarrow$ $G = \lambda^2(\delta_{ij})$ *für eine Funktion* $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$.

Insbesondere: längentreu $\Leftrightarrow$ flächentreu und winkeltreu.

Beweis: Nach Lemma 6.1 ist $L(F \circ \gamma) = L_g(\gamma)$, also folgt aus $g_{ij} = \delta_{ij}$ direkt die Längentreue von F. Umgekehrt betrachten wir für beliebige $x_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$ die Kurve $\gamma(t) = x_0 + tv$ und folgern aus der Längentreue

$$\sqrt{g(x_0)(v,v)} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \sqrt{g(x_0+tv)(v,v)}\, dt = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_g(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} L_{\mathbb{R}^2}(\gamma|_{[0,\varepsilon]}) = |v|,$$

also durch Polarisation $g_{ij} = \delta_{ij}$. Damit ist (1) gezeigt. Aus $\det G = 1$ folgt die Flächentreue direkt nach Definition 6.3. Ist umgekehrt F flächentreu, so gilt für beliebiges $x_0 \in U$ mit $D_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \varepsilon\}$

$$\sqrt{\det G(x_0)} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon(x_0)} \sqrt{\det G} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A(F|_{D_\varepsilon(x_0)}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} A_{\mathbb{R}^2}(D_\varepsilon(x_0)) = 1.$$

Ist schließlich F winkeltreu und $e_{1,2}$ die Standardbasis, so folgt mit Lemma 6.2

$$g_{12} = \|e_1\|_g \, \|e_2\|_g \, \cos\angle(DF \cdot e_1, DF \cdot e_2) = \|e_1\|_g \, \|e_2\|_g \, \cos\angle_{\mathbb{R}^2}(e_1, e_2) = 0,$$

$$g_{11} - g_{22} = g(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = \|e_1 + e_2\|_g \, \|e_1 - e_2\|_g \, \cos\angle_{\mathbb{R}^2}(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 0.$$

Die Darstellung in (3) gilt also mit $\lambda = \sqrt{(g_{11} + g_{22})/2} > 0$. Die umgekehrte Implikation in (3) folgt direkt aus Lemma 6.2. $\square$

Um eine längentreue bzw. flächentreue bzw. winkeltreue Umparametrisierung einer gegebenen Fläche $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ herzustellen, ist nach Satz 6.1 ein Diffeomorphismus $\phi : V \to U$ zu bestimmen , der folgende Gleichungen löst:

$$\begin{aligned}
\tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\, D\phi = \mathrm{E}_2 \quad & \text{für} \quad \tilde{F} = F \circ \phi \ \text{ längentreu},\\
\det \tilde{G} = (\det G) \circ \phi\, (\det D\phi)^2 = 1 \quad & \text{für} \quad \tilde{F} = F \circ \phi \ \text{ flächentreu},\\
\tilde{G} = D\phi^{\mathrm{T}}\,(G \circ \phi)\, D\phi \in \mathbb{R}^+\mathrm{E}_2 \quad & \text{für} \quad \tilde{F} = F \circ \phi \ \text{ winkeltreu}.
\end{aligned}$$

Die Längentreue führt auf drei Bedingungen für die beiden gesuchten Funktionen ϕ^1 und ϕ^2. Es könnte der Verdacht aufkommen, dass das Problem überbestimmt ist, also nicht immer lösbar. Dieser Zweifel ist in der Tat berechtigt, und zwar hat Gauß eine Krümmungsgröße gefunden, die im Fall der Existenz einer längentreuen Parametrisierung gleich Null sein muss. Diesen Satz, den Gauß als *Theorema egregium* bezeichnet hat, werden wir in Folgerung 9.3 beweisen.

Die Bedeutung der winkeltreuen (oder konformen) Parametrisierung liegt im Bezug zur komplexen Analysis. Sei $F : U \to V$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$, also insbesondere $\det DF > 0$. Nach Lemma 6.3(3) ist F genau dann winkeltreu bezüglich des Standardskalarprodukts, wenn $DF^{\mathrm{T}} DF = \lambda^2 \mathrm{E}_2$ für eine Funktion $\lambda > 0$, das heißt $\frac{1}{\lambda} DF$ ist orthogonal. Schreiben wir $F = (u, v) = u + iv$, so bedeutet das

$$DF(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+\mathbb{SO}(2) \quad \text{bzw. äquivalent} \quad u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x.$$

Die orientierungserhaltenden, winkeltreuen Diffeomorphismen sind also genau die holomorphen Diffeomorphismen. Hat man nun zwei winkeltreue Parameterdarstellungen einer Fläche, und ist der Parameterwechsel orientierungserhaltend, so ist der Parameterwechsel holomorph. Dies ist der Anfangspunkt der Theorie der Riemannschen Flächen, also der eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten.

Satz 6.2 (Existenz konformer Parameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Dann gibt es zu $w_0 \in U$ eine Umgebung $\tilde{U}$ und einen Diffeomorphismus $\phi \in C^\infty(V, \tilde{U})$, so dass $F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ winkeltreu (konform) parametrisiert ist.*

Der Beweis dieses Satzes erfordert die lokale Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung und kann an dieser Stelle nicht geführt werden. Der erste Beweis stammt von Gauß*. Er setzte voraus, dass die Koordinatenfunktionen $F^i = F^i(x,y)$ der gegeben Fläche reell-analytisch sind, das heißt sie sind lokal als Potenzreihen in den Variablen x und y darstellbar, und erhält dann die Lösung ebenfalls als lokal konvergente Potenzreihe. Der erste Beweis für glatte Flächen stammt von L. Lichtenstein (1911).

Wir wollen schließlich kurz auf die flächentreuen Parametrisierungen eingehen. Der lokale Existenzbeweis kann auf die Lösung eines Anfangswertproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen reduziert werden.

Satz 6.3 (Existenz flächentreuer Parameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $w_0 \in U$. Dann gibt es eine Umgebung $\tilde{U}$ von w_0 und einen Diffeomorphismus $\phi : V \to \tilde{U}$, so dass $F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ flächentreu parametrisiert ist.*

Beweis: Wir können $w_0 = 0$ annehmen, und machen für ϕ den Ansatz

$$\phi(x,y) = (x, \varphi(x,y)) \text{ mit } \varphi(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

Wie nach Lemma 6.2 gezeigt, ist $F \circ \phi$ genau dann flächentreu, wenn $\det(G \circ \phi)\,(\det D\phi)^2 = 1$. Der Satz ist also bewiesen, wenn φ glatte Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\det G(x, \varphi(x,y))}} \quad \text{und} \quad \varphi(x,0) = 0.$$

Nach Picard-Lindelöf besitzt dieses Problem für $|x|, |y| < \delta$ eine eindeutige Lösung, die glatt von x und y abhängt.† □

*C. F. Gauß: Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Preisschrift für die Kopenhagener Akademie der Wissenschaften, 1825

†vgl. J. Dieudonné: Foundations of modern analysis, Academic Press, New York and London 1969, §X,7

7 Die zweite Fundamentalform einer Fläche

Wir kommen jetzt zur Definition der Krümmung einer Fläche. Da eine Fläche in verschiedenen Richtungen unterschiedlich gekrümmt sein kann, erwarten wir nicht, die Krümmung nur durch eine Funktion zu erfassen. Stattdessen lassen wir uns von der Idee leiten, dass die Krümmung die Normalkomponente der zweiten Ableitungen sein sollte, vgl. die entsprechende Definition 2.2 für Kurven.

Definition 7.1 (zweite Fundamentalform) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Einheitsnormale $N : U \to \mathbb{S}^2$ längs F. Die von $x \in U$ abhängige symmetrische Bilinearform*

$$h(x)(v,w) = \langle D^2F(x)(v,w), N(x)\rangle \quad (v, w \in \mathbb{R}^2)$$

heißt zweite Fundamentalform von F. Bezüglich der Standardbasis hat h die Koeffizienten

$$h_{ij} : U \to \mathbb{R},\ h_{ij}(x) = \langle \partial^2_{ij} F(x), N(x)\rangle \quad (1 \leq i, j \leq 2).$$

In einem Skalarproduktraum kann man jeder Bilinearform kanonisch eine lineare Abbildung zuordnen. Dies ist zum Beispiel deshalb wichtig, weil man dann von den Eigenwerten der Bilinearform reden kann, und zwar meint man die Eigenwerte der zugeordneten Abbildung. Wir wollen diese Tatsache aus der linearen Algebra kurz wiederholen.

Lemma 7.1 *Sei $g(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt und $h(\cdot,\cdot)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$h(v,w) = g(v, Sw) \quad \textit{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{7.1}$$

Ist h symmetrisch, so ist S selbstadjungiert bezüglich g, das heißt es gilt

$$g(Sv, w) = g(v, Sw) \quad \textit{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Es sei (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}), das heißt

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k \quad \text{für } i, k = 1, \ldots, n. \tag{7.2}$$

Wir definieren S durch seine Matrixdarstellung, und zwar sei $Se_l = \sum_{j=1}^n S_l^j e_j$ mit

$$S_l^j = \sum_{k=1}^n g^{jk} h_{kl} \quad \text{für } j, l = 1, \ldots, n.$$

Gleichung (7.1) folgt, denn für $v = e_i$ und $w = e_l$ gilt

$$g(e_i, Se_l) = \sum_{j=1}^n g_{ij}\, S_l^j = \sum_{k=1}^n \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n g_{ij}\, g^{jk}}_{=\delta_i^k}\Big) h_{kl} = h_{il}.$$

Die Eindeutigkeit von S mit (7.1) ist offensichtlich, ebenso die Selbstadjungiertheit von S, wenn h symmetrisch ist. □

Definition 7.2 *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N längs F, und h die zugehörige zweite Fundamentalform. Die eindeutig bestimmte, von $x \in U$ abhängige lineare Abbildung $S(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit*

$$h(x)(v, w) = g(x)\big(S(x)v, w\big) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2 \tag{7.3}$$

heißt Weingartenabbildung von F. Bezüglich der Standardbasis hat sie die Matrixdarstellung

$$S(x)e_k = \sum_{i=1}^{2} S_k^i(x) e_i \quad \text{mit } S_k^i(x) = \sum_{j=1}^{2} g^{ij}(x)\, h_{jk}(x). \tag{7.4}$$

Die Weingartenabbildung S ist selbstadjungiert bezüglich g für alle $x \in U$.

Im allgemeinen ist die Standardbasis keine g-Orthonormalbasis, und die Matrix von S bezüglich der Standardbasis ist nicht symmetrisch.

Beispiel 7.1 Für Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x, y, f(x,y))$ haben wir in Beispiel 6.1 und Beispiel 6.2 die Normale und die erste Fundamentalform berechnet:

$$N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad \text{und} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

Die zweite Fundamentalform ergibt sich ohne weiteres zu

$$(h_{ij}) = \big(\langle \partial_{ij} F, N \rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Weingartenabbildung brauchen wir die Inverse von (g_{ij}):

$$(g^{ij}) = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt nach etwas Rechnung die Matrix der Weingartenabbildung:

$$S = \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} (1 + f_y^2)\, f_{xx} - f_x f_y\, f_{xy} & (1 + f_y^2)\, f_{xy} - f_x f_y\, f_{yy} \\ (1 + f_x^2)\, f_{xy} - f_x f_y\, f_{xx} & (1 + f_x^2)\, f_{yy} - f_x f_y\, f_{xy} \end{pmatrix}.$$

Hat der Graph im Punkt $(z_0, f(z_0)) \in U \times \mathbb{R}$ eine horizontale Tangentialebene, das heißt es gilt $Df(z_0) = 0$, so folgt bezüglich der nach oben weisenden Normalen

$$g_{ij}(z_0) = \delta_{ij}, \quad \partial_i g_{jk}(z_0) = 0, \quad S_j^i(z_0) = h_{ij}(z_0) = \partial_{ij}^2 f(z_0). \tag{7.5}$$

Beispiel 7.2 Für eine Rotationsfläche $F(t, \varphi) = (r(t) \cos\varphi, r(t) \sin\varphi, h(t))$ gilt, vergleiche Beispiel 6.3,

$$N = \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \begin{pmatrix} -h' \cos\varphi \\ -h' \sin\varphi \\ r' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DF = \begin{pmatrix} r' \cos\varphi & -r \sin\varphi \\ r' \sin\varphi & r \cos\varphi \\ h' & 0 \end{pmatrix},$$

und ferner

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (r')^2 + (h')^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich für die zweite Fundamentalform

$$(h_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \begin{pmatrix} r'h'' - h'r'' & 0 \\ 0 & rh' \end{pmatrix},$$

und schließlich die Weingartenabbildung

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{h'}{\sqrt{(r')^2 + (h')^2}} \dfrac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Die geneigten Leser mögen überprüfen: der erste Eintrag in der Matrix von S ist genau die Krümmung der ebenen Kurve $c(t) = (r(t), 0, h(t))$ bezüglich der Normalen $N(t) = N(t, 0)$.

Satz 7.1 (Weingartengleichung) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche mit zweiter Fundamentalform h und Weingartenabbildung S bezüglich der Normalen N. Dann gilt*

$$DN = -DF \cdot S \quad \textit{und} \quad h(v, w) = -\langle DN \cdot v, DF \cdot w \rangle.$$

Beweis: Für $1 \leq j, k \leq 2$ gilt $\langle \partial_j N, N \rangle = \frac{1}{2} \partial_j |N|^2 = 0$ sowie

$$\langle \partial_j N, \partial_k F \rangle = \partial_j \underbrace{\langle N, \partial_k F \rangle}_{=0} - \langle N, \partial^2_{jk} F \rangle = -h(e_j, e_k) = -g(Se_j, e_k) = -\langle DF \cdot Se_j, DF \cdot e_k \rangle.$$

Es folgt $DN \cdot e_j = -DF \cdot Se_j$, also die erste Behauptung, und weiter

$$h(v, w) = g(Sv, w) = \langle DF \cdot Sv, DF \cdot w \rangle = -\langle DN \cdot v, DF \cdot \rangle.$$

Ebene Kurven konstanter Krümmung sind Geraden oder Kreise, siehe Satz 2.1. Wir zeigen nun entsprechende Aussagen für Flächen.

Satz 7.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, und $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche mit Normale N und zweiter Fundamentalform h. Dann sind äquivalent:*

(1) *$F(U)$ liegt in einer Ebene.*

(2) *$h = 0$.*

(3) *N ist konstant.*

Beweis: Liegt $F(U)$ in einer affinen Ebene $p + E$, so bilden $\partial_i F$ eine Basis von E und folglich ist N Normalenvektor von E. Aber $\partial^2_{ij} F$ liegt in E, also $h = \langle D^2 F, N \rangle = 0$.

Aus $h = 0$ bzw. $S = 0$ folgt mit der Weingartengleichung $DN = -DF \cdot S = 0$.

Ist N konstant, so folgt $D\langle F, N \rangle = \langle DF, N \rangle + \langle F, DN \rangle = 0$, also ist $\langle F, N \rangle$ konstant. $\square$

Satz 7.3 *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche und $R > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$F(U)$ liegt in einer Sphäre mit Radius R.*

(2) *$h = \pm\frac{1}{R}g$ bzw. $S = \pm\frac{1}{R}\mathrm{Id}$.*

Beweis: Betrachte für $m \in \mathbb{R}^3$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}|F(x) - m|^2$ mit Ableitungen

$$\partial_j f = \langle F - m, \partial_j F\rangle \quad \text{und} \quad \partial^2_{ij} f = \langle F - m, \partial^2_{ij} F\rangle + g_{ij}.$$

Ist m Mittelpunkt der Sphäre in (1), so ist die Funktion f konstant. Es folgt dann $F - m \perp \operatorname{Bild} DF$, also bei geeigneter Wahl der Normalen $F - m = -RN$, und weiter

$$0 = \partial^2_{ij} f = -\langle R\,N, \partial^2_{ij} F\rangle + g_{ij} = -R\,h_{ij} + g_{ij}.$$

Sei umgekehrt $h = \frac{1}{R}g$ nach geeigneter Wahl der Normalen. Dann folgt aus Satz 7.1, dass die Funktion $m := F - RN$ konstant ist:

$$\partial_j m = \partial_j F - R\,\partial_j N = \partial_j F - R\,DF \cdot Se_j = \partial_j F - R\,DF \cdot \frac{1}{R}e_j = 0.$$

Wegen $F = m + R\,N$ liegt F damit auf einer Sphäre vom Radius R. □

Satz 7.4 (Transformationsverhalten von h und S) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit zweiter Fundamentalform h bezüglich der Normalen N.*

(1) *Ist $\tilde{F} = F \circ \phi$ Umparametrisierung mit einem C^2-Diffeomorphismus $\phi : V \to U$, so folgt für die zweite Fundamentalform von $\tilde{F}$ bzgl. der Normalen $\tilde{N} = N \circ \phi$*

$$\tilde{h}(v, w) = h \circ \phi(D\phi \cdot v, D\phi \cdot w) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{h}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} h_{kl} \circ \phi\, \partial_i \phi^k \partial_j \phi^l,$$

oder äquivalent für die Weingartenabbildung

$$\tilde{S} = (D\phi)^{-1}\,(S \circ \phi)\,D\phi.$$

(2) *Unter einer Euklidischen Bewegung $\tilde{F} = QF + a$ mit $Q \in \mathbb{O}(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ folgt $\tilde{h} = h$ und $\tilde{S} = S$, bzgl. der Normalen $\tilde{N} = QN$.*

Beweis: Aus Satz 7.1, der Weingartengleichung, erhalten wir

$$\tilde{h}(v, w) = -\langle D\tilde{N}\cdot v, D\tilde{F}\cdot w\rangle = -\langle (DN)\circ\phi\, D\phi\cdot v, (DF)\circ\phi\, D\phi\cdot w\rangle = h\circ\phi(D\phi\cdot v, D\phi\cdot w).$$

Die Koordinatendarstellung ergibt sich hieraus wie in Satz 6.1 durch Einsetzen von e_i, e_j. Weiter folgt mit Definition 7.2 und Satz 6.1

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(x)(v, w) &= h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= g(\phi(x))(S(\phi(x))D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= g(\phi(x))(D\phi(x)D\phi(x)^{-1}S(\phi(x))D\phi(x)v, D\phi(x)w) \\
&= \tilde{g}(x)(D\phi(x)^{-1}S(\phi(x))D\phi(x)v, w).
\end{aligned}$$

Mit Definition 7.2 folgt die Transformationsformel für S. Für Behauptung (2) berechnen wir

$$\tilde{h}_{ij}(x) = \langle \partial_{ij}^2 (QF + a)(x), QN(x) \rangle = \langle Q\,\partial_{ij}^2 F(x), QN(x) \rangle = h_{ij}(x).$$

Die Gleichheit $\tilde{S} = S$ folgt nun aus Satz 6.1(2) und Definition 7.2. □

Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert eine Basis v_1, v_2 von $\mathbb{R}^2$ mit

$$(7.6) \qquad g(x)(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad h(x)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij} \quad \text{für gewisse } \varkappa_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Dies ist eine wohlbekannte Tatsache aus der linearen Algebra, doch der nachfolgende Beweis ist instruktiv. Sei $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ eine Orthonormalbasis bezüglich $g(x)$; eine solche Basis kann aus einer beliebigen Basis mit dem Verfahren von Gram-Schmidt hergestellt werden. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(x)} = 1$ besitzt dann eine Darstellung $v = (\cos t)w_1 + (\sin t)w_2$ mit $t \in [0, 2\pi]$, und es gilt

$$h(x)(v,v) = h(x)(w_1, w_1)\, \cos^2 t + h(x)(w_2, w_2)\, \sin^2 t + 2\,h(x)(w_1, w_2)\, \sin t \cos t.$$

Die rechte Seite ist 2π-periodisch und stetig in t, nimmt also ihr Infimum an einer Stelle $t_1 \in [0, 2\pi)$ an. Die Vektoren $v_1 = \cos(t_1)w_1 + \sin(t_1)w_2$ und $v_2 = -\sin(t_1)w_1 + \cos(t_1)w_2$ bilden dann wieder eine Orthonormalbasis bezüglich $g(x)$, und es folgt

$$0 = \frac{d}{d\tau} h(x)\big((\cos\tau)v_1 + (\sin\tau)v_2, (\cos\tau)v_1 + (\sin\tau)v_2\big)|_{\tau=0} = 2\,h(x)(v_1, v_2).$$

Also sind v_1, v_2 wie in (7.6) verlangt. Darüber hinaus gilt für $v = (\cos t)v_1 + (\sin t)v_2$

$$h(x)(v,v) = \varkappa_1\, \cos^2 t + \varkappa_2\, \sin^2 t \in [\varkappa_1, \varkappa_2] \quad \text{mit } \varkappa_i = h(x)(v_i, v_i) \text{ für } i = 1, 2,$$

das heißt die Funktion $v \mapsto h(x)(v,v)$ hat unter der Nebenbedingung $\|v\|_{g(x)} = 1$ in $v = v_1$ das Minimum $h(x)(v_1, v_1) = \varkappa_1$ und in $v = v_2$ das Maximum $h(x)(v_2, v_2) = \varkappa_2$. Wegen

$$g(x)(S(x)v_i, v_j) = h(x)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij} = g(x)(\varkappa_i v_i, v_j)$$

sind die $v_{1,2}$ genau die Eigenvektoren der Weingartenabbildung zu den Eigenwerten $\varkappa_{1,2}$.

Definition 7.3 (Hauptkrümmungen) *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Fläche mit erster Fundamentalform g und Weingartenabbildung S. Die beiden Eigenwerte $\varkappa_1, \varkappa_2$ von $S(x)$ heißen Hauptkrümmungen von F im Punkt $x \in U$, die zugehörigen Eigenvektoren von $S(x)$ mit Normierung $\|v\|_{g(x)} = 1$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen. Ferner heißen*

$$H = \frac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2) \quad \text{und} \quad K = \varkappa_1 \varkappa_2$$

mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung von F in $x \in U$.

Die Hauptkrümmungen hängen nicht von der Wahl der Parametrisierung ab, sie sind geometrische Invarianten: sei $\tilde{F} = F \circ \phi$ eine Umparametrisierung der Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ mit dem Diffeomorphismus $\phi \in C^2(V, U)$. Ist $v \in \mathbb{R}^2$ Hauptkrümmungsrichtung von $\tilde{F}$ mit Hauptkrümmung $\varkappa$ im Punkt $x \in V$, so folgt

$$\|D\phi(x)v\|_{g(\phi(x))} = \|v\|_{\tilde{g}(x)} = 1,$$

$$S(\phi(x))D\phi(x)v = D\phi(x)\tilde{S}(x)D\phi(x)^{-1}D\phi(x)v = \varkappa\, D\phi(x)v.$$

Also ist $D\phi(x)v$ Hauptkrümmungsrichtung von F im Punkt $\phi(x)$ zum gleichen Eigenwert. Beachten Sie $DF(\phi(x)D\phi(x)v = D\tilde{F}(x)v$, das heißt v und $D\phi(x)v$ entsprechen demselben Tangentialvektor der Fläche in $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 7.3 Für das Helikoid $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(s,t) = (s\cos t, s\sin t, at)$, mit $a > 0$ gilt

$$\partial_1 F = (\cos t, \sin t, 0), \quad \partial_2 F = (-s\sin t, s\cos t, a), \quad N = \frac{1}{(s^2+a^2)^{1/2}}(a\sin t, -a\cos t, s),$$

und weiter

$$\partial_{11}F = (0,0,0), \quad \partial_{12}F = \partial_{21}F = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \partial_{22}F = -(s\cos t, s\sin t, 0).$$

Für die erste und zweite Fundamentalform ergibt sich

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{s^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{s^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für die Weingartenabbildung und die Hauptkrümmungsrichtungen

$$S = -\frac{a}{s^2+a^2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{s^2+a^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat das Helikoid die mittlere Krümmung bzw. Gaußsche Krümmung

$$H = 0 \quad \text{und} \quad K = -\Big(\frac{a}{s^2+a^2}\Big)^2.$$

Beispiel 7.4 Die Rotationsfläche $F(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ hat als Hauptkrümmungsrichtungen

$$v_1 = \frac{e_1}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{e_2}{r(t)},$$

mit zugehörigen Hauptkrümmungen

$$\varkappa_1 = \frac{r'h'' - h'r''}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}^3} \quad \text{und} \quad \varkappa_2 = \frac{h'}{\sqrt{(r')^2+(h')^2}}\,\frac{1}{r}.$$

Beispiel 7.5 Die mittlere und Gaußsche Krümmung einer in Graphendarstellung gegebenen Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ lauten

$$\begin{aligned} H &= \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}, \\ K &= \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}. \end{aligned}$$

Anstatt von einer gegebenen Fläche auszugehen und deren Krümmungen zu berechnen, kann man umgekehrt das Problem betrachten, eine Fläche mit vorgeschriebener Krümmungsfunktion zu bestimmen: zu einer gegebenen Funktion $H : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H = H(x,y,z)$ sucht man also einen Graphen $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$, der in jedem Punkt $F(x,y)$ die mittlere Krümmung $H(F(x,y))$ hat. Analog kann man die Gaußsche Krümmung als Funktion $K : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $K = K(x,y,z)$, vorschreiben. Gesucht sind dann also Lösungen der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung

$$\frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}} = H(x,y,f(x,y))$$

bzw. der Monge-Ampére Gleichung

$$\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2} = K(x,y,f(x,y)).$$

Diese Probleme haben die Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen im 20. Jahrhundert maßgeblich beeinflusst.

Wir wollen nun ähnlich wie bei Kurven eine lokale Normalform für Flächen herleiten.

Satz 7.5 (Lokale Normalform von Flächen) *Sei $\tilde{F} \in C^k(V,\mathbb{R}^3)$, $k \geq 1$, reguläre Fläche und $B(X) = Q\big(X - \tilde{F}(w_0)\big)$ für $Q \in \mathbb{O}(3)$ mit $Q\big(\text{Bild}\, D\tilde{F}(w_0)\big) = \mathbb{R}^2$. Dann gibt es eine Umgebung $W \subset V$ von w_0, einen C^k-Diffeomorphismus $\phi : W \to U$ mit $\phi(w_0) = 0$ und eine Funktion $f \in C^k(U)$ mit $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, so dass für $F = B \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$ gilt:*

$$F(x,y) = (x,y,f(x,y)) \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$

Ist $\tilde{F} \in C^2(V,\mathbb{R}^3)$, so gilt bei geeigneter Wahl von Q außerdem die Entwicklung

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2\big) + o(x^2+y^2).$$

Dabei sind $\varkappa_{1,2}$ die Hauptkrümmungen von F im Nullpunkt bezüglich der Normalen e_3.

Bemerkung. Die $\varkappa_{1,2}$ sind auch die Hauptkrümmungen der gegebenen Fläche $\tilde{F}$ im Punkt w_0 bezüglich der Normalen $Q^{-1}e_3$. Dies folgt direkt aus der Invarianz gegenüber Umparametrisierungen und Euklidischen Bewegungen.

Beweis: Bezeichnet π die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$, so folgt

$$B(\tilde{F}(w_0)) = 0 \quad \text{und} \quad \ker D(\pi \circ B \circ \tilde{F})(w_0) = \ker \big(\pi \circ Q \circ D\tilde{F}(w_0)\big) = \{0\}.$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es eine Umgebung W von w_0, so dass $\phi := \pi \circ B \circ \tilde{F} : W \to \phi(W) =: U$ ein C^k-Diffeomorphismus ist mit $\phi(w_0) = 0$. Nun folgt für $F = B \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1}$

$$\pi \circ F = (\pi \circ B \circ \tilde{F}) \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_U.$$

Also gilt $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ mit $f = F^3 \in C^k(U)$. Weiter folgt $F(0) = B(\tilde{F}(\phi^{-1}(0))) = B(\tilde{F}(w_0)) = 0$, insbesondere $f(0) = F^3(0) = 0$, und wegen $DF(0) = Q\, D\tilde{F}(w_0)\, D\phi^{-1}(0)$

$$\operatorname{Bild} DF(0) \subset Q\big(\operatorname{Bild} D\tilde{F}(w_0)\big) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \quad \Rightarrow \quad Df(0) = DF^3(0) = 0.$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Für die zweite drehen wir die Fläche noch um die z-Achse. Seien $v_{1,2}$ die Hauptkrümmungsrichtungen von F im Nullpunkt. Dann gilt

$$\delta_{ij} = \langle DF(0)v_i, DF(0)v_j\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle v_i, v_j\rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

Also ist durch $Rv_i = e_i$, $i = 1, 2$, eine Abbildung $R \in \mathbb{O}(2)$ definiert. Bezeichne mit $Q_R \in \mathbb{O}(3)$ die Fortsetzung mit $Q_R e_3 = e_3$. Dann ist $Q_R F$ Graph der Funktion $f_R = f \circ R^{-1}$ auf der Menge $R(U)$. Es gilt $f_R(0) = 0$, $Df_R(0) = 0$, sowie für alle $v \in \mathbb{R}^2$

$$D^2 f_R(0)(v, v) = \frac{d^2}{ds^2} f_R(sv)|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} f(sR^{-1}v)|_{s=0} = D^2 f(0)(R^{-1}v, R^{-1}v).$$

Nach Polarisationsformel folgt $D^2 f_R(0)(v, w) = D^2 f(0)(Rv, Rw)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Nun ist $D^2 f(0) = h(0)$ die zweite Fundamentalform von F im Punkt $z = 0$ bezüglich der Normalen e_3, siehe (7.5). Es ergibt sich nach Wahl von R

$$D^2 f_R(0)(e_i, e_j) = D^2 f(0)(R^{-1}e_i, R^{-1}e_j) = h(0)(v_i, v_j) = \varkappa_i \delta_{ij}.$$

Betrachten wir statt F die Fläche $Q_R F$ und beachten die Invarianz der Hauptkrümmungen unter Q_R, so folgt die behauptete Entwicklung. $\square$

Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(z) = (z, f(z))$ eine in lokaler Normalform gegebene Fläche, und N Einheitsnormale mit $N(0) = e_3$. Dann können wir die zweite Fundamentalform $h(0)$ bzw. genauer ihre quadratische Form $h(0)(v, v)$ wie folgt geometrisch interpretieren. Für $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(0)} = |v| = 1$ heißt

$$\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(s) = F(sv) = (sv, f(sv))$$

Normalschnitt bei $0 \in U$ in Richtung v. Es gilt $\gamma'(0) = v$, und γ verläuft in der durch v, e_3 aufgespannten Ebene E. Bezüglich der Normalen e_3 hat der Normalschnitt γ die Krümmung

$$\varkappa = \langle \gamma''(0), e_3\rangle = D^2 f(0)(v, v) = h(0)(v, v).$$

Ist $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ beliebige reguläre Fläche und $\|v\|_{g(x)} = 1$, so heißt $h(x)(v,v)$ Normalkrümmung von F im Punkt x in Richtung v. Sind $\varkappa_{1,2}$ die Hauptkrümmungen zu den Hauptkrümmungsrichtungen $v_{1,2}$, so gilt

$$h(x)(v,v) = \cos^2(t)\varkappa_1 + \sin^2(t)\varkappa_2 \quad \text{für } v = \cos(t)v_1 + \sin(t)v_2.$$

Die Hauptkrümmungen sind also die Extremwerte der Normalkrümmung. Dies hatten wir schon bei der Definition der Hauptkrümmungen festgestellt, siehe (7.6).

Bei der folgenden Definition sei daran erinnert, dass die Gaußsche Krümmung als Produkt der beiden Hauptkrümmungen bzw. Determinante der Weingartenabbildung nicht von der Wahl der Normalen abhängt.

Definition 7.4 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Gaußscher Krümmung K. Der Punkt $x \in U$ heißt*

$$\begin{aligned} \textit{elliptisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) > 0, \\ \textit{hyperbolisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) < 0, \\ \textit{parabolisch} \quad &\Leftrightarrow \quad K(x) = 0. \end{aligned}$$

Folgerung 7.1 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Normale N und Gaußscher Krümmung K. Dann gelten für $z_0 \in U$ folgende Aussagen:*

(1) *Ist $K(z_0) > 0$, so gibt es eine Umgebung V von z_0 mit $\langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle \neq 0$ für alle $z \in V\backslash\{z_0\}$, das heißt F liegt lokal auf einer Seite der affinen Tangentialebene.*

(2) *Ist $K(z) < 0$, so hat dagegen die Funktion $z \mapsto \langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle$ in jeder Umgebung von z_0 sowohl strikt positive als auch strikt negative Werte.*

Beweis: Wir können annehmen, dass F in Normalform gegeben ist, das heißt es ist $z_0 = 0$, $N(z_0) = e_3$ und $F(z) = (z, f(z))$ mit

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2\big) + o(x^2 + y^2).$$

Es gilt dann $\langle F(z) - F(z_0), N(z_0)\rangle = f(z)$. Betrachte nun eine Folge $z_k = (x_k, y_k) \neq 0$ mit $z_k \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $z_k/|z_k| \to (\xi, \eta) \in \mathbb{S}^1$, und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{|z_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\big(\varkappa_1 x_k^2 + \varkappa_2 y_k^2\big)}{|z_k|^2} = \frac{1}{2}\big(\varkappa_1 \xi^2 + \varkappa_2 \eta^2\big).$$

Ist zum Beispiel $\varkappa_{1,2} > 0$ in $z_0 = 0$, so zeigt ein Widerspruchsargument $f(z) > 0$ für $z \neq 0$ nahe bei $z_0 = 0$. Ist dagegen $\varkappa_1 < 0 < \varkappa_2$ in $z_0 = 0$, so folgt direkt $f(se_1) < 0$ und $f(se_2) > 0$ für s hinreichend klein. $\square$

Definition 7.5 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit Normale N und erster bzw. zweiter Fundamentalform g bzw. h. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_{g(x)} = 1$ heißt Asymptotenrichtung im Punkt $x \in U$, falls $h(x)(v,v) = 0$.*

Seien $\varkappa_1 \leq \varkappa_2$ die beiden Hauptkrümmungen in $x \in U$, mit Hauptkrümmungsrichtungen v_1 und v_2, und $K(x) = \varkappa_1\varkappa_2$ die Gaußsche Krümmung in $x \in U$. Die folgende Tabelle gibt die Asymptotenrichtungen v (bis aufs Vorzeichen) an:

$K(x) < 0$	$\varkappa_1 < 0 < \varkappa_2$	$v = \sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_2 - \varkappa_1}} v_1 \pm \sqrt{\frac{-\varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1}} v_2,$
$K(x) > 0$	$\varkappa_{1,2} > 0$, $\varkappa_{1,2} < 0$	es gibt keine Asymptotenrichtungen,
$K(x) = 0$	$\varkappa_1 = 0 < \varkappa_2$	$v = v_1,$
	$\varkappa_1 < 0 = \varkappa_2$	$v = v_2,$
	$\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$	v beliebig.

Definition 7.6 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Fläche. Eine reguläre Kurve $\gamma : I \to U$ heißt*

$$\begin{aligned} &\textit{Krümmungslinie} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \textit{ ist Hauptkrümmungsrichtung für alle } t \in I, \\ &\textit{Asymptotenlinie} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \textit{ ist Asymptotenrichtung für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Beispiel 7.6 Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(t,\varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, h(t))$ eine Rotationsfläche. Für festes $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $t \mapsto (t,\varphi)$ eine Krümmungslinie, ebenso für festes $t \in I$ die Kurve $\varphi \mapsto (t,\varphi)$. Dies folgt daraus, dass in der gegebenen Parametrisierung die Weingartenabbildung diagonalisiert ist, siehe Beispiel 7.4.

8 Die Gleichungen $H = 0$ und $K = 0$

In diesem Kapitel wollen wir einen Blick auf die beiden Gleichungen $H = 0$ beziehungsweise $K = 0$ werfen, und damit als Beispielklassen die Minimalflächen und die Regelflächen einführen. Die Minimalflächen treten in der Natur als Seifenhäute auf, die in einen Draht eingespannt sind. Die Seifenhaut minimiert unter dieser Nebenbedingung ihre Oberfläche und befindet sich deshalb in einem Spannungsgleichgewicht. Genau diesen Aspekt wollen wir mathematisch erfassen. Wir beginnen mit zwei Hilfsaussagen, die aber von allgemeinem Interesse sind.

Lemma 8.1 (Zerlegung in Normal- und Tangentialkomponente) *Sei $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N und erster Fundamentalform g. Dann gibt es zu jeder vektorwertigen Funktion $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $\xi : U \to \mathbb{R}^2$ mit $X = DF \cdot \xi + \langle X, N\rangle N$, und zwar gilt, wenn (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}) bezeichnet,*

$$\xi = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle X, \partial_i F\rangle e_j,$$

Ist $F \in C^{k+1}(U,\mathbb{R}^3)$ und $X \in C^k(U,\mathbb{R}^3)$, so ist $\xi \in C^k(U,\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar wegen $\ker DF = \{0\}$. Für ξ wie in der Behauptung folgt

$$\langle DF \cdot \xi, \partial_k F\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle X, \partial_i F\rangle \langle \partial_j F, \partial_k F\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \langle X, \partial_i F\rangle g^{ij} g_{jk} = \langle X, \partial_k F\rangle.$$

Hieraus folgt leicht $X = DF \cdot \xi + \langle X, N\rangle N$. □

Als zweites brauchen wir die wohlbekannte Regel für die Ableitung der Determinante. Im Fall $n = 2$ kann diese auch explizit überprüft werden, da die Formeln für die Determinante und die inverse Matrix sehr einfach sind.

Lemma 8.2 *Ist $G : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ in $t = 0$ differenzierbar und $\det\big(G(0)\big) \neq 0$, so gilt*

$$\frac{d}{dt}\big(\det G\big)|_{t=0} = \det\big(G(0)\big)\,\mathrm{tr}\,\big(G(0)^{-1}G'(0)\big).$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage erst im Fall $G(0) = \mathrm{E}_n$. Nach Definition gilt

$$\det(G) = g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{nn} + \sum_{\sigma\in S_n\setminus\{\mathrm{id}\}} \mathrm{sign}\,(\sigma) g_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n\sigma(n)}.$$

Nun gilt $g_{ij}(t) = \delta_{ij} + g'_{ij}(0)t + o(t)$, und für $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\det(G)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} g'_{ii}(0) = \mathrm{tr}\, G'(0).$$

Für $G(0) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ beliebig verwenden wir $\det\big(G(t)\big) = \det\big(G(0)\big)\det\big(G(0)^{-1}G(t)\big)$, und erhalten wegen $\big(G(0)^{-1}G\big)'(0) = G(0)^{-1}G'(0)$ die gewünschte Formel

$$\frac{d}{dt}\det(G)|_{t=0} = \det\big(G(0)\big)\,\mathrm{tr}\,\big(G(0)^{-1}G'(0)\big).$$

□

Definition 8.1 *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit mittlerer Krümmung H bezüglich der Normalen N. Der mittlere Krümmungsvektor von F ist dann die Funktion*

$$\vec{H} = 2HN : U \to \mathbb{R}^3.$$

$\vec{H}$ ist unabhängig von der Wahl der Normalen N definiert.

Wir wollen jetzt noch eine Notation zur Integration auf Flächen einführen. Für eine C^1-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit erster Fundamentalform g und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\int_U f\, dA_g = \int_U f\sqrt{\det G} \quad \text{für } G = (g_{ij})_{1\le i,j\le 2}, \tag{8.1}$$

falls das rechte Integral im Sinn von Riemann oder Lebesgue definiert ist. In diesem Zusammenhang nennt man dA_g auch das induzierte Flächenelement von F.

Präzise ist durch $A_g(E) = \int_E \sqrt{\det G}$ ein Maß auf U definiert, und (8.1) ist einfach das Integral bezüglich dieses Maßes. Bei einer Umparametrisierung $\tilde{F} = F \circ \phi$ mit $\phi \in C^1(V,U)$ liefert Satz 6.1 in Verbindung mit dem Transformationssatz

$$\int_V f \circ \phi \, dA_{\tilde{g}} = \int_V (f \sqrt{\det G}) \circ \phi \, |\det D\phi| = \int_U f \, dA_g \quad \text{für } f : U \to \mathbb{R}.$$

Das Integral ist also invariant unter Umparametrisierungen, vergleiche (6.1).

Satz 8.1 (Erste Variation des Flächeninhalts) *Sei $F(\cdot,t) : U \to \mathbb{R}^3$, $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, eine Einparameterschar von regulären Flächen, so dass gilt:*

(1) $F \in C^2(U \times (-\varepsilon_0,\varepsilon_0), \mathbb{R}^3)$,

(2) $F(\cdot,0)$ *ist regulär und* $A\big(F(\cdot,0)\big) < \infty$,

(3) *Es gibt eine kompakte Menge $K \subset U$, so dass $F(\cdot,t) = F(\cdot,0)$ auf $U \backslash K$.*

Dann ist $F(\cdot,t)$ regulär für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon) \subset (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, und mit $\phi = \partial_t F$ gilt

$$\frac{d}{dt} A(F) = -\int_U \langle \vec{H}, \phi \rangle \, dA_g \quad \textit{für } t \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Beweis: Die Regularität von $F(\cdot,t)$ für $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ folgt leicht mit einem Widerspruchsargument aus (2) und (3). Wir berechnen als erstes

$$\partial_t g_{ij} = \partial_t \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle = \langle \partial_i \phi, \partial_j F \rangle + \langle \partial_i F, \partial_j \phi \rangle.$$

Mit Lemma 8.2 folgt

$$\partial_t \sqrt{\det(G)} = \frac{1}{2} \sqrt{\det(G)} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \partial_t g_{ji} = \sqrt{\det(G)} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle \partial_j F, \partial_i \phi \rangle.$$

Durch Vertauschen des Integrals mit der Parameterableitung nach t folgt

$$\frac{d}{dt} A(F) = \int_U \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \langle \partial_j F, \partial_i \phi \rangle \, dA_g. \tag{8.2}$$

Betrachte nun erst den Fall, dass ϕ ein normales Variationsfeld ist, das heisßt $\phi = \varphi N$ mit $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Dann folgt aus der Weingartengleichung

$$\partial_i \phi = \partial_i(\varphi N) = \varphi \, \partial_i N + (\partial_i \varphi) \, N = -\varphi \, DF \cdot S e_i + (\partial_i \varphi) \, N,$$

und weiter mit $2H = \operatorname{tr} S = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} h_{ij}$ und (8.2)

$$\frac{d}{dt} A(F) = -\int_U \varphi \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} h_{ij} \, dA_g. = -\int_U \langle \vec{H}, \phi \rangle \, dA_g.$$

Als zweites sei $\phi = DF \cdot \xi$ für ein Vektorfeld $\xi \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ mit $\xi = 0$ auf $U \backslash K$. Sei $\psi : U \times \mathbb{R} \to U$ der Fluss von ξ, das heißt

$$\partial_s \psi(x,s) = \xi(\psi(x,s)) \quad \text{und} \quad \psi(x,0) = x.$$

Die Abbildungen $\psi(\cdot, s) : U \to U$ sind C^1-Diffeomorphismen mit $\psi(\cdot, s) = \mathrm{id}$ auf $U \backslash K$, und es gilt $\partial_s(F \circ \psi)|_{s=0} = DF \cdot \xi$. Also folgt mit (8.2) und der Invarianz des Flächeninhalts unter Umparametrisierungen

$$\frac{d}{dt} A(F) = \frac{\partial}{\partial s} A(F \circ \psi)|_{s=0} = 0 = - \int_U \langle \vec{H}, \phi \rangle \, dA_g.$$

Da sich jedes Vektorfeld ϕ in der Form $\phi = \varphi\nu + DF \cdot \xi$ schreiben lässt nach Lemma 8.1, ist der Satz bewiesen. □

Definition 8.2 *Eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$ heißt Minimalfläche.*

Die untenstehende Folgerung besagt, dass die Minimalflächengleichung $H = 0$ äquivalent dazu ist, dass die Ableitung des Flächeninhalts für alle normalen Variationen mit kompaktem Träger gleich Null ist. Analog zu der Situation bei Extremwerten reeller Funktionen bedeutet die Bedingung nicht, dass der Flächeninhalt unter den gegebenen Randbedingungen tatsächlich minimiert wird, sondern es ist lediglich eine notwendige Bedingung.

Folgerung 8.1 (Variationscharakterisierung der Minimalflächen) *Für eine reguläre C^2-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $H = 0$.

(2) $\frac{d}{dt} A(F + t\phi)|_{t=0} = 0$ *für alle normalen Variationen* $\phi = \varphi N$, *mit* $\varphi \in C_c^\infty(U)$.

Beweis: Die Implikation (1) ⇒ (2) folgt direkt aus Satz 8.1, und umgekehrt liefert der Satz

$$\int_U \varphi H \sqrt{\det(G)} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} A(F + t\varphi N)|_{t=0} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(U).$$

Ein Standardargument, das Fundamentallemma der Variationsrechung, zeigt nun $H = 0$. □

Als Beispiel für Minimalflächen haben wir bereits das Helikoid kennengelernt, siehe Beispiel 7.3. Um weitere Beispiele zu berechnen, wollen wir aus Satz 8.1 eine Umformulierung der Minimalflächengleichung herleiten. Dazu führen wir für eine Riemannsche Metrik $(g_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ den folgenden Differentialoperator ein:

$$\Delta_g : C^2(U) \to C^0(U), \; \Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_i \big(\sqrt{\det G} \, g^{ij} \partial_j u \big).$$

Δ_g heißt Laplace-Beltrami-Operator von g.

Folgerung 8.2 *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ mit erster Fundamentalform g und mittlerem Krümmungsvektor $\vec{H}$ gilt*

$$\vec{H} = \Delta_g F.$$

Beweis: Nach Satz 8.1 und (8.2) gilt für alle $\phi \in C_c^\infty(U,\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
-\int_U \langle \vec{H},\phi\rangle\, dA_g &= \frac{d}{dt}A(F+t\phi)|_{t=0}\\
&= \int_U \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}\langle \partial_j F, \partial_i\phi\rangle \sqrt{\det G}\\
&= -\int_U \Big\langle \sum_{i,j=1}^2 \partial_i(\sqrt{\det G}\, g^{ij}\partial_j F),\phi\Big\rangle\\
&= -\int_U \langle \Delta_g F,\phi\rangle\, dA_g.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wiederum aus dem Fundamentallemme der Variationsrechnung. $\square$

Beispiel 8.1 (Katenoid) Für eine Rotationsfläche

$$F:(a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ F(z,\varphi) = (r(z)\cos\varphi, r(z)\sin\varphi, z), \qquad \text{wobei } r:(a,b)\to(0,\infty),$$

ergibt sich nach Beispiel **??**

$$\vec{H} = \frac{1}{r\sqrt{(r')^2+1}}\left(\partial_z\Big(\frac{r}{\sqrt{(r')^2+1}}\partial_z F\Big) + \partial_\varphi\Big(\frac{\sqrt{(r')^2+1}}{r}\partial_\varphi F\Big)\right).$$

Sei nun F eine Minimalfläche. Wegen $\partial_\varphi F^3 = 0$ folgt aus $\vec{H}^3 = 0$

$$\frac{d}{dz}\frac{r}{\sqrt{(r')^2+1}} = 0.$$

Die Gleichung wird gelöst durch die Funktionen

$$r_{a,z_0}(z) = a\cosh\frac{z-z_0}{a} \qquad \text{mit } a>0,\ z_0\in\mathbb{R}.$$

Bis auf vertikale Translationen und Streckungen beschreiben diese Funktionen nur eine Fläche, das sogenannte Katenoid. Eine genauere Analyse zeigt, dass das Katenoid und die Ebene die einzigen Rotationsminimalflächen sind.

Beispiel 8.2 Der mittlere Krümmungsvektor eines Graphen $F: U\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,f(x,y))$ lautet mit $v = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$

$$\begin{aligned}
\vec{H}^1 &= \frac{1}{v}\left(\Big(\frac{1+f_y^2}{v}\Big)_x - \Big(\frac{f_xf_y}{v}\Big)_y\right)\\
\vec{H}^2 &= \frac{1}{v}\left(-\Big(\frac{f_xf_y}{v}\Big)_x + \Big(\frac{1+f_x^2}{v}\Big)_y\right)\\
\vec{H}^3 &= \frac{1}{v}\left(\Big(\frac{f_x}{v}\Big)_x + \Big(\frac{f_y}{v}\Big)_y\right).
\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir wegen $\vec{H}^3 = 2HN^3 = 2H/v$ folgende Darstellung der mittleren Krümmung, vgl. Beispiel 7.5,

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}.$$

Bevor wir zur Gleichung $K = 0$ kommen, untersuchen wir Flächen, die durch eine einparametrige Schar von Geraden gegeben sind, sogenannte Regelfächen. Um die Darstellung nicht unnötig zu verkomplizieren, arbeiten wir im glatten Kontext.

Definition 8.3 *Seien $c, V \in C^\infty(I, \mathbb{R}^3)$ mit $|V(s)| = 1$ für alle $s \in I$. Dann heißt*

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(s,t) = c(s) + tV(s),$$

die von c, V erzeugte Regelfäche.

Es ist nicht zu erwarten, dass die so definierten Regelflächen überall regulär sind. Wir können aber genau angeben, in welchen Punkten dies nicht der Fall st.

Lemma 8.3 *Sei $F \in C^\infty(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ die von c, V erzeugte Regelfläche. Dann ist* $\operatorname{rang} DF(s,t) < 2$ *genau wenn folgende beiden Aussagen gelten:*

(1) *$c'(s)^\perp$ und $V(s)$ sind linear abhängig ($c'(s)^\perp$ Komponente senkrecht zu $V'(s)$).*

(2) *$V'(s) = 0$ oder* $\displaystyle t = -\frac{\langle c'(s), V'(s)\rangle}{|V'(s)|^2}.$

Beweis: Es gilt $\partial_1 F = c' + tV'$ und $\partial_2 F = V$, wobei $' = \frac{d}{ds}$. Daraus folgt wegen $|V| = 1$

$$\det G = |c' + tV'|^2 - \langle c', V\rangle^2.$$

Wir schreiben $c' = (c')^\perp + \lambda V'$, wobei $\lambda = 0$ im Fall $V' = 0$ und

$$\lambda = \frac{\langle c', V'\rangle}{|V'|^2} \quad \text{wenn } V' \neq 0.$$

Berücksichtigen wir $\langle V, V'\rangle = 0$, so folgt

$$\det G = |(c')^\perp|^2 - \langle (c')^\perp, V\rangle^2 + (\lambda + t)^2 |V'|^2.$$

Die rechte Seite ist Null genau wenn $(c')^\perp, V$ linear abhängig sind (Gleichheit bei Cauchy-Schwarz), und wenn außerdem $V' = 0$ oder $t = -\lambda$. □

Lemma 8.4 *Die Gaußkrümmung einer Regelfläche $F(s,t) = c(s) + tV(s)$ ist*

$$K = -\frac{\det(c', V, V')^2}{(\det G)^2} \quad \textit{für } \det G \neq 0.$$

Insbesondere ist $K \leq 0$.

Beweis: Wir berechnen

$$\partial_1^2 F = c'' + tV'', \quad \partial_1\partial_2 F = V', \quad \partial_2^2 F = 0,$$

sowie mit dem Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$N = \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|} = \frac{c' \times V + tV' \times V}{\sqrt{\det G}}.$$

Bezeichnet $H = (h_{ij})$ die Matrix der zweiten Fundamentalform, so folgt

$$h_{12} = \frac{\det(c', V, V')}{\sqrt{\det G}} \quad \text{und} \quad h_{22} = 0.$$

Die Matrix des Weingartenoperators S ist $G^{-1}H$, somit folgt

$$K = \det S = \frac{\det H}{\det G} = -\frac{\det(c', V, V')^2}{(\det G)^2}.$$

$\square$

Der folgende Hilfssatz liefert im Fall $V' \neq 0$ eine günstige Darstellung der Regelfläche; dies wird später benötigt.

Lemma 8.5 *Sei $F \in C^\infty(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $F(s,t) = c(s) + tV(s)$, eine Regelfläche mit $|V| = 1$. Ist $V' \neq 0$ auf I, so gibt es eine Umparametrisierung*

$$\tilde{F} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \tilde{F}(s,t) = F(s, t + u(s)) \quad \textit{mit } u \in C^\infty(I),$$

so dass für $\tilde{c}(s) = \tilde{F}(s,0)$ gilt: $\langle \tilde{c}', V' \rangle \equiv 0$.

Beweis: Aus dem Ansatz für $\tilde{F}$ folgt $\tilde{c}(s) = F(s, u(s)) = c(s) + u(s)V(s)$, und weiter

$$\langle \tilde{c}', V' \rangle = \langle c', V' \rangle + u|V'|^2.$$

Mit $u = -\dfrac{\langle c', V' \rangle}{|V'|^2}$ folgt die Behauptung. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur Gleichung $K = 0$.

Satz 8.2 (Flächen mit $K = 0$) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit $K \equiv 0$, und $x_0 \in U$ kein Flachpunkt. Dann kann F nahe bei x_0 als Regelfläche umparametrisiert werden.*

Wir brauchen zum Beweis die Existenz spezieller Koordinaten. Um unsere Diskussion nicht zu unterbrechen, formulieren wir nur die Aussage und führen die Konstruktion der Koordinaten im Anhang aus.

Satz 8.3 (Krümmungslinienparameter) *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche und $x_0 \in U$ kein Nabelpunkt, das heißt die Hauptkrümmungen in x_0 seien nicht gleich. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : V \to \phi(V) \subset U$ mit $x_0 \in \phi(V)$, so dass für $\tilde{F} = F \circ \phi$ gilt:*

$$\tilde{g}_{12} = 0,\ \tilde{h}_{12} = 0 \quad \textit{auf } V.$$

In Koordinaten mit $g_{12} = h_{12} = 0$ lautet die Matrix des Weingartenoperators

$$S = \begin{pmatrix} \frac{h_{11}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{h_{22}}{g_{22}} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind die Kordinatenrichtungen $e_{1,2}$ (nicht normierte) Hauptkrümmungsrichtungen. Kurven, deren Tangentenvektoren bis auf Normierung Hauptkrümmungsrichtungen sind, heißen Krümmungslinien. Zum Beispiel sind für eine Rotationsfläche die Koordinatenlinien Hauptkrümmungslinien.

Beweis: *(von Satz 8.2)* Nach Satz 8.3 können wir annehmen, dass F in Krümmungslinenparametern gegeben ist, also

$$g_{12} = h_{12} = 0 \quad \text{auf } U.$$

Außerdem sei nach Translation $x_0 = (0,0)$. Die Koordinatenvektoren $e_{1,2}$ sind Eigenvektoren des Weingartenoperators zu den Eigenwerten $\varkappa_{1,2}$. Da $\varkappa_1 \varkappa_2 = 0$ und $x_0 = (0,0)$ nach Voraussetzung kein Flachpunkt, können wir $\varkappa_1 \neq 0$ sowie $\varkappa_2 = 0$ auf U annehmen. Zusätzlich können wir erreichen, dass

$$|\partial_1 F(s,0)| = 1 \quad \text{und} \quad |\partial_2 F(0,t)| = 1 \quad \text{auf } U.$$

Dazu ersetzen wir $F(s,t)$ durch $\tilde{F}(s,t) = F(\alpha(s), \beta(t))$, wobei $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ und

$$\alpha'(s) = \frac{1}{|\partial_1 F|(\alpha(s), 0)} \quad \text{und} \quad \beta'(t) = \frac{1}{|\partial_2 F|(0, \beta(t))}.$$

Jetzt zeigen wir $|\partial_2 F| = 1$ und $\partial_2^2 F = 0$ auf U. Daraus folgt dann

$$F(s,t) = F(s,0) + t \partial_2 F(s,0) \quad \text{wobei } |\partial_2 F(s,0)| = 1,$$

also die gewünschte Darstellung als Regelfläche. Die Weingartengleichung liefert

$$\partial_1 N = -DF \cdot S e_1 = -\varkappa_1 \partial_1 F \neq 0 \quad \text{sowie} \quad \partial_2 N = -DF \cdot S e_2 = 0.$$

Es folgt $\langle \partial_2^2 F, N \rangle = -\langle \partial_2 F, \partial_2 N \rangle = 0$, sowie $\langle \partial_2 F, \partial_1 N \rangle = -\varkappa_1 \langle \partial_2 F, \partial_1 F \rangle = 0$ wegen $g_{12} = 0$. Wir berechnen weiter

$$\langle \partial_2^2 F, \partial_1 F \rangle = -\frac{1}{\varkappa_1} \langle \partial_2^2 F, \partial_1 N \rangle = -\frac{1}{\varkappa_1} \partial_2 \langle \partial_2 F, \partial_1 N \rangle + \frac{1}{\varkappa_1} \langle \partial_2 F, \partial_1 \partial_2 N \rangle = 0,$$

$$\partial_1 |\partial_2 F|^2 = 2 \langle \partial_2 F, \partial_1 \partial_2 F \rangle = 2 \partial_2 \langle \partial_2 F, \partial_1 F \rangle - 2 \langle \partial_2^2 F, \partial_1 F \rangle = 0.$$

Es folgt $|\partial_2 F(s,t)|^2 = |\partial_2 F(0,t)|^2 = 1$ und schließlich $\langle \partial_2^2 F, \partial_2 F \rangle = \frac{1}{2} \partial_2 |\partial_2 F|^2 = 0$. Da die Vektoren $\partial_1 F, \partial_2 F, N$ eine Basis bilden, ist $\partial_2^2 F = 0$ auf U und der Satz ist bewiesen. □

Satz 8.4 *Sei $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Gaußkrümmung $K = 0$ auf U. Dann gibt es eine offene und dichte Menge $V \subset U$, so dass für $x \in V$ gilt: es gibt eine offene Umgebung V_x, so dass $F|_{V_x}$ ein Stück einer Ebene, Zylinderfläche, Kegelfläche oder Tangentenfläche parametrisiert.*

Beweis: Sei $U_1 = \{x \in U : h(x) \neq 0\}$, und U_2 sei die Menge aller $x \in U$ mit $h = 0$ auf einer offenen Umgebung von x. Dann gilt $U \backslash U_2 = \overline{U_1}$, insbesondere ist $U_1 \cup U_2$ offen und dicht in U. Für $x \in U_2$ parametrisiert F lokal eine Ebene, und für $x \in U_1$ existiert lokal eine Umparametrisierung als Stück einer Regelfläche

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(s,t) = c(s) + tV(s).$$

Sei $I_1 = \{s \in I : V'(s) \neq 0\}$, und I_2 sei die Menge der $s \in I$ mit $V' = 0$ auf einer offenen Umgebung von s. Dann ist wieder $I_1 \cup I_2$ offen und dicht in I, und auf $I_2 \times \mathbb{R}$ ist F lokal eine Zylinderfläche. Betrachte weiter $J_1 = \{s \in I_1 : c'(s) \neq 0\}$ sowie die Menge J_2 aller $s \in I_1$ mit $c' = 0$ auf einer offenen Umgebung von s. $J_1 \cup J_2$ ist offen und dicht in I_1, und auf $J_2 \times \mathbb{R}$ ist F lokal eine Kegelfläche. Schließlich zeigen wir, dass F auf $J_1 \times \mathbb{R}$ lokal als Tangentenfläche parametrisiert werden kann. Da $V' \neq 0$ auf $J_1 \subset I_1$, existiert nach Lemma 8.5 eine Umparametrisierung mit $\langle \tilde{c}', V' \rangle = 0$. Aber es gilt $\det(\tilde{c}', V, V') = 0$ auf J_1 nach Lemma 8.4, und somit sind $\tilde{c}', V$ linear abhängig auf J_3. Wegen $\tilde{c}' \neq 0$ ist die Umparametrisierung eine Tangentenfläche. Insgesamt hat die Fläche auf einer offenen und dichten Teilmenge, lokal nach Umparametrisierung, den behaupteten Typ. □

Eine Fläche mit $K = 0$ kann aus offenen Stücken von Ebenen, Zylinderflächen, Kegelflächen und Tangentenflächen zusammengesetzt sein. Insbesondere ist sie nicht schon durch ein kleines Stück eindeutig bestimmt. Enthält dagegen eine Minimalfläche zum Beispiel ein offenes Stück einer Ebene, so ist sie insgesamt eben. Als Grund für diese eindeutige Fortsetzbarkeit kann die Tatsache angesehen werden, dass die partielle Differentialgleichung $H = 0$ elliptisch ist, zum Beispiel in einer Darstellung als Graph. Dagegen ist die Gleichung $K = 0$ degeneriert.

Als Anhang tragen wir nun die Konstruktion der Krümmungslinienparameter nach. Dazu benötigen wir aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen den Begriff des Flusses eines Vektorfelds.

Satz 8.5 *Sei $X \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $0 \in U$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subset U$ des Nullpunkts und eine glatte Abbildung $\varphi : V \times (-\delta, \delta) \to U$ mit*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) &= X\big(\varphi(x,t)\big) \quad \textit{für alle } (x,t) \in V \times (-\delta,\delta), \\ \varphi(x,0) &= 0 \quad \textit{für alle } x \in V. \end{aligned}$$

Für festes $x \in U$ existiert $\varphi(x,\cdot)$ als Lösung des Anfangswertproblems nach Picard–Lindelöf auf einem maximalen Intervall I_x und ist eindeutig bestimmt. Der Satz besagt, dass eine Umgebung V existiert, so dass alle I_x ein festes Intervall $(-\delta, \delta)$ enthalten. Zweitens hängt die Lösung $\varphi(x,t)$ glatt vom Anfangswert $x \in V$ ab.

Der Kommutator von Vektorfeldern $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ ist das Vektorfeld $[X,Y] \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$[X,Y](x) = DY(x) \cdot X(x) - DX(x) \cdot Y(x) \quad \text{für } x \in U,$$

beziehungsweise in Koordinaten

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{2} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \Big) e_j.$$

Die Bezeichnung erklärt sich so: für $f \in C^\infty(U)$ ergibt die Symmetrie von $D^2 f$

$$\big(\partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X\big) f = \sum_{i,j=1}^{2} \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \Big) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Also gilt die Formel

$$(8.3) \qquad \big(\partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X\big) f = \partial_{[X,Y]} f.$$

Satz 8.6 *Seien $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $0 \in U$. Ist $[X,Y] = 0$ auf U und sind $X(0), Y(0)$ linear unabhängig, so existiert ein Diffeomorphismus $f : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to W \subset U$ mit $0 \in W$, so dass gilt:*

$$\frac{\partial f}{\partial s} = X \circ f \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = Y \circ f.$$

Beweis: Seien $\varphi, \psi : V \times (-\delta, \delta) \to U$ die Flüsse der Vektorfelder X bzw. Y. Für s,t fest schreiben wir $\varphi_s, \psi_t : V \to U$, $\varphi_s(x) = \varphi(x,s)$ sowie $\psi_t(x) = \psi(x,t)$. Für $V \subset U$ und $\varepsilon > 0$ geeignet haben wir dann die glatte Abbildung

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to U,\ f(s,t) = \psi_t(\varphi_s(0)) = \psi(\varphi(s,0), t).$$

Aus der Definition folgt

$$f(s,0) = \varphi(0,s), \quad \frac{\partial f}{\partial s}(s,0) = X(f(s,0)), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = Y\big(f(s,t)\big).$$

Für die s-Ableitung berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} Y \circ f = (DY) \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Andererseits folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} X \circ f = (DX) \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = (DX \cdot Y) \circ f.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial s} - X \circ f\Big) = (DY) \circ f \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial s} - X \circ f\Big) + [X,Y] \circ f.$$

Aber $\partial_s f = X \circ f$ an der Stelle $(s,0)$. Da $[X,Y] = 0$ nach Voraussetzung, ergibt sich die fehlende erste Gleichung aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. Ebenfalls nach Voraussetzung ist $Df(0,0)$ invertierbar, und somit Diffeomorphismus auf $W = f\big((-\varepsilon, \varepsilon)^2\big)$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. $\square$

Lemma 8.6 *Seien $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $0 \in U$, und $X(0)$, $Y(0)$ linear unabhängig. Nach Verkleinerung von U gibt es $\lambda, \mu \in C^\infty(U)$ mit $\lambda, \mu > 0$, so dass*

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0 \ \text{ auf } U \qquad \text{für } \tilde{X} = \lambda X,\, \tilde{Y} = \mu Y.$$

BEWEIS: Ohne Einschränkung sind X, Y linear unabhängig sind in allen $x \in U$. Es gilt dann

$$[X, Y] = aX + bY \qquad \text{mit } a, b \in C^\infty(U).$$

Mit dem Ansatz $\tilde{X} = \lambda X$, $\tilde{Y} = \mu Y$ berechnen wir

$$\begin{aligned} D\tilde{Y} \cdot \tilde{X} - D\tilde{X} \cdot \tilde{Y} &= \lambda D(\mu Y) \cdot X - \mu D(\lambda X) \cdot Y \\ &= \lambda\mu(DY \cdot X - DX \cdot Y) + \lambda(D\mu \cdot X)Y - \mu(D\lambda \cdot Y)X \\ &= \big(\lambda a - D\lambda \cdot Y\big)\mu X + \big(\mu b + D\mu \cdot X\big)\lambda Y. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir $\lambda, \mu > 0$ finden mit

$$D \log \lambda \cdot Y = a \qquad \text{und} \qquad D \log \mu \cdot X = -b.$$

Wir lösen die erste Gleichung, die zweite ist entsprechend. Sei $f(s,t) = \psi_t(\varphi(s,0))$ wie oben definiert bezüglich X, Y. Dann gilt für $u = \log \lambda \circ f$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (D \log \lambda) \circ f \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = (D \log \lambda) \circ f \cdot Y \circ f = (D \log \lambda \cdot Y) \circ f.$$

Wähle nun $u(s,t) = \int_0^t a(f(s,\tau))\, d\tau$. Dann erfüllt die Funktion $\lambda = (\exp u) \circ f^{-1} > 0$ die gewünschte Gleichung. □

BEWEIS: *(von Satz 8.3)* Da der Nullpunkt nach Voraussetzung kein Nabelpunkt ist, gibt es auf einer Umgebung glatte Vektorfelder X, Y mit folgenden Eigenschaften:

- $X(x), Y(x)$ sind Eigenvektoren des Weingartenoperators zu $\varkappa_1(x) > \varkappa_2(x)$;
- $X(x)$, $Y(x)$ sind normiert mit $\|X\|_g = \|Y\|_g = 1$ auf U.

Genauer können diese Vektorfelder explizit aus g und h mit linearer Algebra berechnet werden. Nach Lemma 8.6 können wir zu $\tilde{X} = \lambda X$ und $\tilde{Y} = \mu Y$ übergehen, so dass $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ und $\tilde{X}, \tilde{Y}$ linear unabhängig auf U, nach Verkleinerung von U. Nun liefert Satz 8.6 die gesuchte Parametrisierung nach Krümmungslinien. □

9 Hauptsatz der Flächentheorie

Der Hauptsatz der Kurventheorie besagt, dass es eine bis auf Euklidische Bewegungen eindeutige, nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve gibt, die eine gegebene Krümmungsfunktion hat. Wir wollen jetzt eine entsprechende Aussage für Flächen diskutieren. Auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ seien Funktionen $(a_{ij}) \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ und $(b_{ij}) \in C^{k-2}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ gegeben, so dass gilt:

- (a_{ij}) ist symmetrisch und strikt positiv definit auf U,
- (b_{ij}) ist symmetrisch auf U.

Wir stellen folgende Fragen:

- Gibt es eine reguläre C^k-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit den Fundamentalformen $g_{ij} = a_{ij}$ und $h_{ij} = b_{ij}$?
- Wenn ja, ist diese Fläche bis auf eigentliche Bewegungen eindeutig bestimmt?

Es gibt allerdings keine Fläche F mit $g_{ij} = \delta_{ij}$ und $h_{ij} = \delta_{ij}$. Denn nach Satz 7.3 müsste F in eine Einheitssphäre abbilden, es gibt aber keine längentreuen Parametrisierungen der Sphäre. Beispiel **??**. Die Gleichungen $g_{ij} = a_{ij}$ und $h_{ij} = b_{ij}$ sind also nicht immer zu erfüllen, und es stellt sich die Frage, welche Hindernisse es gegen ihre Lösbarkeit gibt. Die Gleichungen stellen ein nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen für die gesuchte Fläche F dar. Wir werden für dieses System gewisse Integrabilitätsbedingungen herleiten und zeigen, dass diese notwendig und hinreichend für die lokale Lösbarkeit sind.
Für eine reguläre Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ mit Normale N verwenden wir im folgenden die Notation

$$X^\top = X - \langle X, N\rangle N \qquad \text{für } X : U \to \mathbb{R}^3.$$

Definition 9.1 (kovariante Ableitung) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche. Für $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ bezeichne $\nabla_\xi \eta : U \to \mathbb{R}^2$ das eindeutig bestimmte Vektorfeld mit*

$$(D_\xi(D_\eta F))^\top = DF \cdot \nabla_\xi \eta.$$

Wir berechnen

$$D_\xi(D_\eta F) = \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \partial_i(\eta^j \partial_j F) = \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \eta^j \partial^2_{ij} F + \sum_{i,j=1}^2 \xi^i (\partial_i \eta^j) \partial_j F = D^2F(\xi, \eta) + DF \cdot D_\xi \eta.$$

Bezeichnet h die zweite Fundamentalform bezüglich N, so folgt die Darstellung

$$D_\xi(D_\eta F) = DF \cdot \nabla_\xi \eta + h(\xi, \eta) N. \tag{9.1}$$

Die Notation $\nabla_\xi \eta$ ist dadurch gerechtfertigt, dass folgende Differentiationsregeln gelten.

Satz 9.1 (Eigenschaften von ∇) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und C^1-Vektorfelder ξ, η erfüllt $\nabla_\xi \eta$ folgende Rechenregeln:*

(1) $\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = \lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta$ *und* $\nabla_\xi(\lambda\eta_1+\mu\eta_2) = \lambda\nabla_\xi\eta_1 + \mu\nabla_\xi\eta_2$ *(Linearität).*

(2) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi\nabla_\xi\eta$ *für* $\varphi \in C^1(U)$ *(Linearität bzgl. Funktionen in* ξ*).*

(3) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (D_\xi\varphi)\eta$ *(Produktregel in* η*).*

(4) $\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1$ *(Symmetrie).*

(5) $D_\xi\big(g(\eta_1,\eta_2)\big) = g(\nabla_\xi\eta_1,\eta_2) + g(\eta_1,\nabla_\xi\eta_2)$ *(Produktregel bzgl.* g*).*

Beweis: Die Eigenschaften (1),(2),(3) und (4) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Ableitung D mit Definition 9.1. Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage in (1):

$$DF\cdot\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = (D_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}(D_\eta F))^\top = \lambda(D_{\xi_1}(D_\eta F))^\top + \mu(D_{\xi_2}(D_\eta F))^\top = DF\cdot\big(\lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta\big).$$

Schließlich ergibt sich (5) aus

$$\begin{aligned} D_\xi(g(\eta_1,\eta_2)) &= D_\xi\langle D_{\eta_1}F, D_{\eta_2}F\rangle \\ &= \langle D_\xi(D_{\eta_1}F), D_{\eta_2}F\rangle + \langle D_{\eta_1}F, D_\xi(D_{\eta_2}F)\rangle \\ &= \langle DF\cdot\nabla_\xi\eta_1, DF\cdot\eta_2\rangle + \langle DF\cdot\eta_1, DF\cdot\nabla_\xi\eta_2\rangle \\ &= g(\nabla_\xi\eta_1,\eta_2) + g(\eta_1,\nabla_\xi\eta_2). \end{aligned}$$

□

Die Aussage zur Symmetrie von ∇ in Satz 9.1(4) muss für beliebige Vektorfelder $\xi,\eta : U \to \mathbb{R}^2$ geeignet modifiziert werden.

Folgerung 9.1 (Symmetrie der kovarianten Ableitung) *Ist* $F : U \to \mathbb{R}^3$ *reguläre* C^2*-Fläche, so gilt für Vektorfelder* $\xi,\eta \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$

$$\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi = [\xi,\eta].$$

Dabei ist $[\xi,\eta] = D_\xi\eta - D_\eta\xi = \sum_{i,j=1}^2(\xi^i\partial_i\eta^j - \eta^i\partial_i\xi^j)e_j$ *der Kommutator.*

Beweis: Durch Entwicklung in die Standardbasis und Verwendung von (1),(2),(3) und (4) aus Satz 9.1:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi &= \sum_{i,j=1}^2\big(\xi^i\nabla_{e_i}(\eta^je_j) - \eta_i\nabla_{e_i}(\xi^je_j)\big) \\ &= \sum_{i,j=1}^2(\xi^i\partial_i\eta^j - \eta^i\partial_i\xi^j)e_j + \sum_{i,j=1}^2\underbrace{(\xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i)}_{\text{schief}}\underbrace{\nabla_{e_i}e_j}_{\text{gerade}} \\ &= [\xi,\eta]. \end{aligned}$$

□

Definition 9.2 (Christoffelsymbole) *Sei* $F : U \to \mathbb{R}^3$ *eine* C^2*-Fläche mit kovarianter Ableitung* ∇*. Die eindeutig bestimmten Funktionen* $\Gamma^i_{jk} : U \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\nabla_{e_i}e_j = \sum_{k=1}^2\Gamma^i_{jk}e_k$$

heißen Christoffelsymbole von F*.*

Lemma 9.1 *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gilt:*

(1) $\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k$ *für* $k = 1, 2$.

(2) $\nabla_\xi \eta = D_\xi \eta + \Gamma(\xi, \eta)$ *mit* $\Gamma(\xi, \eta) = \sum_{i,j,k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j e_k$.

Beweis: Behauptung (1) folgt direkt aus der Symmetrie, Satz 9.1(4):

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k e_k = \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{21}^k e_k.$$

Die zweite Aussage ergibt sich durch Entwicklung in die Standardbasis:

$$\nabla_\xi \eta = \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \nabla_{e_i}(\eta^j e_j) = \sum_{i,j=1}^2 \xi^i (\partial_i \eta^j) e_j + \sum_{i,j=1}^2 \xi^i \eta^j \nabla_{e_i} e_j = D_\xi \eta + \sum_{i,j,k=1}^2 \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

□

Satz 9.2 (Levi-Cività) *Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche. Dann ist die kovariante Ableitung durch die erste Fundamentalform bestimmt. Genauer gilt für die Christoffelsymbole*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \tag{9.2}$$

Dabei ist (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}).

Beweis: Mit der Produktregel Satz 9.1(5) folgt

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{jl} &= \underbrace{g(\nabla_{e_i} e_j, e_l)}_{I} + \underbrace{g(\nabla_{e_i} e_l, e_j)}_{II} \\
\partial_j g_{il} &= \underbrace{g(\nabla_{e_j} e_i, e_l)}_{I} + \underbrace{g(\nabla_{e_j} e_l, e_i)}_{III} \\
\partial_l g_{ij} &= \underbrace{g(\nabla_{e_l} e_i, e_j)}_{II} + \underbrace{g(\nabla_{e_l} e_j, e_i)}_{III}.
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie, Satz 9.1(4), stehen rechts nur die drei Funktionen I, II, III, das heißt wir haben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ II \\ III \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i g_{jl} \\ \partial_j g_{il} \\ \partial_l g_{ij} \end{pmatrix}.$$

Da die Koeffizientenmatrix invertierbar ist, können wir $g(\nabla_{e_i} e_j, e_l)$ als Linearkombination der Funktionen $\partial_i g_{jl}, \partial_j g_{il}, \partial_l g_{ij}$ darstellen; daraus folgt schon die erste Behauptung des Satzes. Explizit ergibt sich durch Addition der ersten beiden Zeilen und Subtraktion der dritten Zeile

$$g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

beziehungsweise mit der Definition der Christoffelsymbole

$$\sum_{m=1}^{2} g_{lm}\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Multiplikation mit g^{kl} und Summation über l liefert

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl} g_{lm}\Gamma_{ij}^{m} = \Gamma_{ij}^{k}.$$

□

Wir bemerken, dass es aus der Definition der kovarianten Ableitung über den Tangentialanteil der zweiten Ableitung keineswegs offensichtlich ist, dass dieses Objekt nur von der ersten Fundamentalform abhängt, also beispielsweise unter längentreuen Verbiegungen invariant ist.

Satz 9.3 (Ableitungsgleichungen der Flächentheorie) *Für eine reguläre Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ gelten die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j F &= \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \partial_k F + h_{ij} N \\ \partial_i N &= -\sum_{j,k=1}^{2} h_{ij} g^{jk} \partial_k F. \end{aligned}$$

Dabei sind N die Normale, g und h die erste bzw. zweite Fundamentalform, und Γ_{ij}^{k} die Christoffelsymbole von F.

Beweis: Mit (9.1) und Definition 9.2 folgt

$$\partial_i \partial_j F = DF \cdot \nabla_{e_i} e_j + h_{ij} N = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \partial_k F + h_{ij} N.$$

Zweitens ergibt sich aus Satz 7.1 und der Definition der Weingartenabbildung

$$\partial_k N = -DF \cdot S e_k = -DF \cdot \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} h_{jk} e_i.$$

Durch Vertauschen von i, k folgt die zweite Gleichung. □

Es ist nun eine Schlüsselbeobachtung, dass die Ableitungsgleichungen als System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die drei vektorwertigen Funktionen $V_1 = \partial_1 F$, $V_2 = \partial_2 F$ und $V_3 = N$ aufgefasst werden können. Genauer erhalten wir das System

$$\partial_\alpha V_j = \sum_{i=1}^{3} A_{\alpha j}^{i} V_i \quad \text{für } \alpha = 1, 2 \text{ und } j = 1, 2, 3, \tag{9.3}$$

wobei die Koeffizienten wie folgt gegeben sind:

$$A^i_{\alpha j} = \begin{cases} \Gamma^i_{\alpha j} & \text{für } 1 \le i, j \le 2, \\ h_{\alpha j} & \text{für } i = 3,\ 1 \le j \le 2, \\ -\sum_{\beta=1}^2 h_{\alpha\beta}\, g^{\beta i} & \text{für } 1 \le i \le 2,\ j = 3, \\ 0 & \text{für } i, j = 3. \end{cases} \tag{9.4}$$

Wie bei der Frage der Existenz von Stammfunktionen ergeben sich Integrabilitätsbedingungen durch das Vertauschen von Ableitungen. Differentiation von (9.3) nach e_β liefert

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\beta V_k &= \partial_\alpha \sum_{j=1}^3 A^j_{\beta k} V_j \\ &= \sum_{j=1}^3 (\partial_\alpha A^j_{\beta k}) V_j + \sum_{j=1}^3 A^j_{\beta k} (\partial_\alpha V_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 (\partial_\alpha A^j_{\beta k}) V_j + \sum_{i,j=1}^3 A^j_{\beta k} A^i_{\alpha j} V_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\partial_\alpha A^i_{\beta k} + \sum_{j=1}^3 A^i_{\alpha j} A^j_{\beta k} \right) V_i. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen von α, β erhalten wir, da V_1, V_2, V_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist,

$$\partial_\alpha A^i_{\beta k} - \partial_\beta A^i_{\alpha k} + \sum_{j=1}^3 (A^i_{\alpha j} A^j_{\beta k} - A^i_{\beta j} A^j_{\alpha k}) = 0. \tag{9.5}$$

Satz 9.4 (Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi) *Für eine reguläre C^3-Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ gelten folgende Identitäten:*

(9.6)

$$\partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} + \sum_{\mu=1}^2 (\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}) = \sum_{\mu=1}^2 (h_{\alpha\mu} h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} h_{\beta\mu}) g^{\mu\lambda} \quad \textit{(Gaußgleichung).}$$

(9.7)

$$\partial_\alpha h_{\beta\gamma} - \partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \sum_{\lambda=1}^2 (h_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} - h_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}) = 0 \qquad \textit{(Gleichung von Codazzi-Mainardi).}$$

Beweis: Die Gaußgleichung ist (9.5) für $i = \lambda$, $k = \gamma$ mit $1 \le \lambda, \gamma \le 2$, wobei (9.4) eingesetzt wird und auf der rechten Seite die Terme mit $j = 3$ stehen. Die Gleichungen von Codazzi-Mainardi ergeben sich aus (9.5) für $i = 3$ und $k = \gamma = 1, 2$ entsprechend. Man kann sich davon überzeugen, dass sich der Fall $k = 3$ und $i = 1, 2$ ebenfalls auf die Gleichungen von Codazzi-Mainardi reduziert; der Fall $i = k = 3$ liefert trivialerweise keine Information. $\square$

Folgerung 9.2 (Theorema egregium, Gauß 1828) *Ist $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^3-Fläche, so gilt für die Gaußsche Krümmung die Formel*

$$K = \frac{\sum_{\lambda=1}^{2} g_{\lambda 1}\Big(\partial_1 \Gamma_{22}^{\lambda} - \partial_2 \Gamma_{12}^{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{2}(\Gamma_{1\mu}^{\lambda}\Gamma_{22}^{\mu} - \Gamma_{2\mu}^{\lambda}\Gamma_{12}^{\mu})\Big)}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Insbesondere kann $K = \varkappa_1 \varkappa_2$ aus der ersten Fundamentalform berechnet werden.

Beweis: Wähle in den Gaußgleichungen (9.6) $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 2$, multipliziere mit $g_{\lambda 1}$ und summiere über $\lambda = 1, 2$. □

Tatsächlich ist das Theorema egregium äquivalent zu den vollen Gaußgleichungen (9.6). Dies liegt daran, dass diese Gleichungen diverse Symmetrien unter Vertauschungen der Indizes besitzen, was wir aber jetzt nicht vertiefen. Das Theorema egregium liefert folgende notwendige Bedingung für die Existenz längentreuer Parametrisierungen, und zeigt insbesondere die Unmöglichkeit längentreuer Landkarten von $\mathbb{S}^2$.

Folgerung 9.3 *Ist eine Fläche $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ lokal längentreu parametrisierbar, so ist ihre Gaußsche Krümmung identisch Null.*

Beweis: In einer längentreuen Parametrisierung ist $g_{ij} = \delta_{ij}$, also folgt die Behauptung aus Folgerung 9.2. □

Das Theorema egregium von Gauß war richtungsweisend für die Entwicklung der Differentialgeometrie im 19. Jahrhundert. Zuerst wurde dieser Satz so verstanden, dass die Gaußsche Krümmung einer Fläche eben invariant ist unter längentreuen Verbiegungen. Für Riemann war das Ergebnis, in Verbindung mit der Entdeckung der hyperbolischen Geometrie durch Bolyai und Lobatschewski, aber Motivation, eine sogenannte innere Geometrie zu entwickeln, bei der die Flächen beziehungsweise Mannigfaltigkeiten abstrakt gegeben und nicht in einen Euklidischen Raum eingebettet sind. Das Theorema egregium besagt, das in solchen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein Krümmungsbegriff allein aus der Längenmessung heraus definiert werden kann. Riemann hat diese Ideen in seinem Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* dargelegt (Göttingen 1854), bei dem übrigens Gauß noch zugegen und angeblich sehr bewegt war. Die Riemannsche Geometrie ist die mathematische Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein 1916).

Satz 9.5 (Hauptsatz der Flächentheorie, Bonnet 1867) *Sei $U = (-1,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $3 \leq k \leq \infty$. Gegeben seien $(g_{\alpha\beta}) \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$, $(h_{\alpha\beta}) \in C^{k-2}(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ mit g, h symmetrisch und g strikt positiv definit. Erfüllen dann g, h die Integrabilitätsbedingungen (9.6) und (9.7), wobei die $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ durch (9.2) definiert sind, so gibt es eine reguläre Fläche $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$, die g und h als erste bzw. zweite Fundamentalform hat. Diese Fläche ist bis auf Euklidische Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Bemerkung. Durch Fortsetzung der Lösung längs Wegen kann gezeigt werden, dass die Aussage des Satzes für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ gilt.

Beweis: Vorab wählen wir zur Normierung eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$ mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} g_{ij}(0,0) & \text{für } 1 \leq i,j \leq 2, \\ 0 & \text{für } 1 \leq i \leq 2, j = 3, \\ 1 & \text{für } i = j = 3. \end{cases} \tag{9.8}$$

Ist w_1, w_2, w_3 eine andere Basis mit $\langle w_i, w_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$, so gilt $w_j = Tv_j$ mit $T \in \mathbb{O}(3)$.

Ausgangspunkt des Beweises ist nun die Tatsache, dass die Ableitungsgleichungen der Flächentheorie in der Formulierung (9.3), also

$$\partial_\alpha V_j = \sum_{i=1}^{3} A^i_{\alpha j} V_i \quad \text{mit } A^i_{\alpha j} \text{ aus (9.4)},$$

längs der x^α-Parameterlinien als lineares, homogenes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $V_1 = \partial_1 F, V_2 = \partial_2 F$ und $V_3 = N$ aufgefasst werden können. Nach (9.2) hängen die Koeffizienten dieses Systems nur von g und h ab. Ist daher $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Fläche mit erster und zweiter Fundamentalform g bzw. h, so folgt durch Anwendung der Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem – erst mit $\alpha = 1$ längs $x^1 \mapsto (x^1, 0)$, dann mit $\alpha = 2$ längs $x^2 \mapsto (x^1, x^2)$ – dass die Funktionen $\partial_1 F, \partial_2 F, N$ durch ihre Werte im Nullpunkt bestimmt sind. Da wir nach einer orthogonalen Abbildung $\partial_1 F(0,0) = v_1, \partial_2 F(0,0) = v_2$ und $N(0,0) = v_3$ annehmen können, und außerdem durch Translation $F(0,0) = 0 \in \mathbb{R}^3$ erreichen, ist F bis auf eine Euklidische Bewegung eindeutig bestimmt.

Zum Beweis der Existenz definieren wir in zwei Schritten eine Lösung V_1, V_2, V_3 von (9.3). Und zwar erhalten wir erst $V_j(x^1, 0)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_1 V_j(x^1, 0) = \sum_{i=1}^{3} A^i_{1j}(x^1, 0) V_i(x^1, 0) \quad \text{für } 1 \leq j \leq 3, \quad V_j(0,0) = v_j,$$

und dann $V_j(x^1, x^2)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_2 V_j(x^1, x^2) = \sum_{i=1}^{3} A^i_{2j}(x^1, x^2) V_i(x^1, x^2) \quad \text{für } 1 \leq j \leq 3, \quad V_j(x^1, 0) = \text{ aus Schritt 1.}$$

Dann gilt (9.3) für $\alpha = 2$ auf ganz U per Definition. Um (9.3) für $\alpha = 1$ zu zeigen, setzen wir $W_j = \partial_1 V_j - \sum_{i=1}^{3} A^i_{1j} V_i$ und berechnen mit den Integrabilitätsbedingungen (9.5)

$$\begin{aligned}
\partial_2 W_j &= \partial_1\partial_2 V_j - \sum_{i=1}^3 (\partial_2 A^i_{1j}) V_i - \sum_{i=1}^3 A^i_{1j}\partial_2 V_i \\
&= \sum_{i=1}^3 (\partial_1 A^i_{2j} - \partial_2 A^i_{1j}) V_i + \sum_{i=1}^3 A^i_{2j}\partial_1 V_i - \sum_{i,k=1}^3 A^i_{1j} A^k_{2i} V_k \\
&= -\sum_{i,k=1}^3 (A^i_{1k} A^k_{2j} - A^i_{2k} A^k_{1j}) V_i + \sum_{i=1}^3 A^i_{2j}\partial_1 V_i - \sum_{i,k=1}^3 A^i_{1j} A^k_{2i} V_k \\
&= \sum_{i=1}^3 A^i_{2j} (\partial_1 V_i - \sum_{k=1}^3 A^k_{1i} V_k) \quad \text{(nach Tausch von } i,k \text{ in der ersten Summe)} \\
&= \sum_{i=1}^3 A^i_{2j} W_i.
\end{aligned}$$

Die W_j erfüllen also längs $x^2 \mapsto (x^1, x^2)$ ebenfalls ein lineares, homogenes System. Da $W_j(x^1, 0) = 0$ nach Definition, folgt $W_j = 0$ auf ganz U aus dem Eindeutigkeitssatz, und die Gleichungen (9.3) sind verifiziert. Nach (9.4) sind die $A^i_{\alpha j} \in C^{k-2}$, und die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert $V_j \in C^{k-1}$. Als nächstes zeigen wir auf U die Gleichungen

$$\langle V_i, V_j\rangle = \begin{cases} g_{ij} & \text{für } 1 \le i,j \le 2, \\ 0 & \text{für } 1 \le i \le 2, j = 3, \\ 1 & \text{für } i = j = 3. \end{cases} \tag{9.9}$$

Dazu berechnen wir mit (9.4) für $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le 2$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \langle V_\beta, V_\gamma\rangle &= \sum_{i=1}^3 A^i_{\alpha\beta}\langle V_i, V_\gamma\rangle + \sum_{i=1}^3 A^i_{\alpha\gamma}\langle V_\beta, V_i\rangle \\
&= \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\langle V_\lambda, V_\gamma\rangle + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\langle V_\beta, V_\lambda\rangle + h_{\alpha\beta}\langle V_3, V_\gamma\rangle + h_{\alpha\gamma}\langle V_\beta, V_3\rangle.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \langle V_\beta, V_3\rangle &= \sum_{i=1}^3 A^i_{\alpha\beta}\langle V_i, V_3\rangle + \sum_{i=1}^3 A^i_{\alpha 3}\langle V_\beta, V_i\rangle \\
&= \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\langle V_\lambda, V_3\rangle + h_{\alpha\beta}\langle V_3, V_3\rangle - \sum_{\gamma,\lambda=1}^2 h_{\alpha\gamma} g^{\gamma\lambda}\langle V_\beta, V_\lambda\rangle.
\end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir

$$\partial_\alpha \langle V_3, V_3\rangle = 2\sum_{i=1}^3 A^i_{\alpha 3}\langle V_3, V_i\rangle = -2\sum_{\beta,\lambda=1}^2 h_{\alpha\beta} g^{\beta\lambda}\langle V_3, V_\lambda\rangle.$$

Multiplikation der Formel (9.2) für $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ mit $g_{\lambda\gamma}$ und Summation über λ ergibt andererseits

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} g_{\lambda\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}).$$

Vertauschen von β und γ und Addition liefert

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} g_{\lambda\gamma} + \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} g_{\lambda\beta}.$$

Sei $(a_{ij}) : U \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ die rechte Seite von (9.9), also $a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, $a_{3\beta} = a_{\beta 3} = 0$ und $a_{33} = 1$. Es ist leicht zu sehen, dass die (a_{ij}) dasselbe System lösen:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha a_{\beta\gamma} &= \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} a_{\lambda\gamma} + \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} a_{\beta\lambda} + h_{\alpha\beta} a_{3\gamma} + h_{\alpha\gamma} a_{\beta 3}, \\
\partial_\alpha a_{\beta 3} &= \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} a_{\lambda 3} + h_{\alpha\beta} a_{33} - \sum_{\gamma,\lambda=1}^{2} h_{\alpha\gamma} g^{\gamma\lambda} a_{\beta\lambda} \\
\partial_\alpha a_{33} &= -2 \sum_{\beta,\lambda=1}^{2} h_{\alpha\beta} g^{\beta\lambda} a_{3\lambda}.
\end{aligned}$$

Wie oben ist der Eindeutigkeitssatz längs Koordinatenlinien anwendbar. Mit der Wahl von $V_j(0,0) = v_j$ nach (9.8) folgt Behauptung (9.9). Wegen $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$ nach (9.2) und $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ nach Voraussetzung gilt $A^i_{\alpha\beta} = A^i_{\beta\alpha}$ für $1 \leq i \leq 3$, das heißt $\partial_1 V_2 = \partial_2 V_1$. Auf U gibt es daher eine Funktion $F \in C^k(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\partial_\alpha F = V_\alpha$ für $\alpha = 1, 2$. Es ist nun leicht zu sehen, dass F die gesuchte, reguläre Fläche mit erster Fundamentalform (g_{ij}) und zweiter Fundamentalform (h_{ij}) ist.

$\square$

10 Kovariante Ableitung und geodätische Krümmung

Unter den einer Fläche $F : U \to \mathbb{R}^3$ zugeordneten geometrischen Größen gibt es einige, die nicht wirklich von der Lage im im Raum abhängen, sondern nur von den Längenverhältnissen auf der Fläche selbst. Salopp gesagt kann eine Ameise, die auf der Fläche umher krabbelt, diese Größen ermitteln. Klar gehören die Länge von Kurven (Lemma 6.1), der Winkel zwischen Tangentialvektoren (Lemma 6.2) und der Flächeninhalt (Gleichung 6.3) dazu, die sich jeweils aus der ersten Fundamentalform berechnen. Das gilt auch für die kovariante Ableitung, die zwar zunächst als Tangentialanteil von D^2F definiert ist, die aber durch die g_{ij} berechenbar ist (Satz 9.2). Ebenso die Gaußsche Krümmung (Folgerung 9.2).

An dieser Stelle machen wir den Schritt, auf die Fläche im $\mathbb{R}^3$ ganz zu verzichten. Wir gehen also nur von einer Riemannschen Metrik $(g_{ij}) : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ aus, das heißt $G = (g_{ij})$ ist symmetrisch und positiv definit. Wir bezeichnen das Paar (U, g) als Riemannsches Gebiet. Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* ist kurz gesagt ein topologischer Raum (Hausdorffsch), der lokal durch Riemannsche Gebiete beschrieben wird. Dieses abstrakte Konzept hat Riemann in seinem Habilitationsvortrag (1854) entworfen. Hier werden wir uns meistens auf Riemannsche Gebiete beschränken. Im Fall klassischer Flächen $F : U \to \mathbb{R}^3$ ist die Metrik gerade die erste Fundamentalform $g_{ij} = \langle \partial_i F, \partial_j F\rangle$. Der abstrakte Ansatz liefert auch Informationen über klassische Flächen.

Definition 10.1 (Kovariante Ableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Für eine Riemannsche Metrik $(g_{ij}) \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ sind die Christoffelsymbole definiert durch*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

Die zugehörige kovariante Ableitung für Vektorfelder $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ist

$$\nabla_\xi \eta = D_\xi \eta + \Gamma(\xi, \eta) \quad \text{mit } \Gamma(\xi,\eta) = \sum_{i,j,k=1}^{2} \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Der Beweis der Rechenregeln für die kovariante Ableitung in Satz 9.1 benutzt die Darstellung über den Tangentialanteil der Fläche. Dies geht jetzt nicht, wir müssen anders argumentieren.

Satz 10.1 (Eigenschaften von ∇, Riemannsch) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und C^1-Vektorfelder ξ, η erfüllt $\nabla_\xi \eta$ folgende Rechenregeln:*

(1) $\nabla_{\lambda\xi_1+\mu\xi_2}\eta = \lambda\nabla_{\xi_1}\eta + \mu\nabla_{\xi_2}\eta$ *und* $\nabla_\xi(\lambda\eta_1 + \mu\eta_2) = \lambda\nabla_\xi\eta_1 + \mu\nabla_\xi\eta_2$ *(Linearität).*

(2) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi\nabla_\xi\eta$ *für* $\varphi \in C^1(U)$ *(Linearität bzgl. Funktionen in ξ).*

(3) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (D_\xi\varphi)\eta$ *(Produktregel in η).*

(4) $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$ *(Symmetrie).*

(5) $D_\xi\big(g(\eta_1, \eta_2)\big) = g(\nabla_\xi \eta_1, \eta_2) + g(\eta_1, \nabla_\xi \eta_2)$ *(Produktregel bzgl. g).*

Beweis: Die Eigenschaften (1),(2),(3) folgen direkt aus Definition 10.1. Für die Symmetrie (4) reicht der Fall $\xi = e_1$, $\eta = e_2$, die allgemeine Aussage ergibt sich dann wie im Beweis von Folgerung 9.1. Aus $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ folgt nun

$$\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k e_k - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{21}^k e_k = 0 = [e_1, e_2].$$

Die Produktregel (5) zeigen wir ebenfalls erst für die Koordinatenfelder $\xi = e_i$, $\eta_1 = e_j$ und $\eta_2 = e_l$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k\, g_{kl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \underbrace{\sum_{k=1}^2 g^{km} g_{kl}}_{=\delta_{lm}} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Indizes j, l und Addition folgt die gewünschte Formel

$$g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) + g(e_j, \nabla_{e_i} e_l) = \partial_i g_{jl} = \partial_i\, g(e_j, e_l).$$

Für allgemeine Vektorfelder ξ, η_1, η_2 ergibt sich (5) nun durch Entwickeln in der Standardbasis und Anwenden der Linearität und Produktregel, also mit den Formeln (1),(2) und (3). $\square$

Wir brauchen als nächstes die kovariante Ableitung von Vektorfeldern längs Kurven.

Definition 10.2 *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$, und $\gamma \in C^1(I, U)$. Die kovariante Ableitung eines Vektorfelds $\xi \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ längs γ ist definiert durch*

$$\frac{\nabla \xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + (\Gamma \circ \gamma)\big(\gamma', \xi\big).$$

Lemma 10.1 (Rechenregeln für $\frac{\nabla}{dt}$) *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik auf U. Für die kovariante Ableitung längs einer Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$ gelten folgende Rechenregeln:*

$$\frac{\nabla(\lambda\xi + \mu\eta)}{dt} = \lambda \frac{\nabla \xi}{dt} + \mu \frac{\nabla \eta}{dt} \quad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{10.1}$$

$$\frac{\nabla(\varphi\xi)}{dt} = \varphi \frac{\nabla \xi}{dt} + \varphi' \xi \quad \text{für } \varphi \in C^1(I), \tag{10.2}$$

$$\frac{d}{dt}\, g \circ \gamma(\xi, \eta) = g \circ \gamma\Big(\frac{\nabla \xi}{dt}, \eta\Big) + g \circ \gamma\Big(\xi, \frac{\nabla \eta}{dt}\Big). \tag{10.3}$$

Beweis: (10.1) und (10.2) folgen aus Definition 10.2. Für (10.3) können wir $\xi = e_i$, $\eta = e_j$ annehmen, allgemein können wir dann in die Standardbasis entwickeln und (10.2) anwenden. Mit der Produktregel (5) aus Satz 10.1 bekommen wir für $x_0 = \gamma(t_0)$, $v_0 = \gamma'(t_0)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\, g \circ \gamma(e_i, e_j)|_{t=t_0} &= D_{v_0}\big(g(e_i, e_j)\big)(x_0) \\ &= g(\nabla_{v_0} e_i, e_j)(x_0) + g(e_i, \nabla_{v_0} e_j)(x_0) \\ &= g \circ \gamma\big(\frac{\nabla e_i}{dt}, e_j\big)(t_0) + g \circ \gamma\big(e_i, \frac{\nabla e_j}{dt}\big)(t_0).\end{aligned}$$

□

Lemma 10.2 (Symmetrie von ∇) *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik. Dann gilt für $f \in C^2(I \times J, U)$, $f = f(t, \varepsilon)$,*

$$\frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}.$$

Beweis: Nach Definition 10.2 gilt

$$\frac{\nabla}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t} + \Gamma \circ f \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Symmetrie $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. □

Mit der kovarianten Ableitung haben wir das Werkzeug, um weitere geometrische Begriffe zu erklären. Wir beginnen mit der Parallelverschiebung längs einer Kurve. Für $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ und eine gegebene Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$, $I = [a, b]$, ist die Gleichung

$$\frac{\nabla \xi}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\xi}{dt} + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \xi) = 0$$

ein lineares, homogenes System erster Ordnung für das gesuchte Vektorfeld $\xi \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz bilden die zugehörigen Lösungen einen 2-dimensionalen Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R}^2)$. Im Fall $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist $\frac{\nabla \xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt}$ die gewöhnliche Ableitung, und die Lösungen $\xi(t)$ sind genau die konstanten vektorwertigen Funktionen. Deshalb werden die Lösungen der Gleichung $\frac{\nabla \xi}{dt} = 0$ allgemein als parallele Vektorfelder längs γ bezüglich g bezeichnet. Zu gegebenem $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\xi_v \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ das eindeutige Vektorfeld mit

$$\frac{\nabla \xi_v}{dt} = 0,\ \xi_v(a) = v.$$

Die Abbildung $P_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P_\gamma(v) = \xi_v(b)$, ist linear nach (10.1). Sind ξ, η parallel längs γ bezüglich g, so gilt außerdem $g(\xi, \eta) = \text{const.}$ nach (10.3). Daher ist die Abbildung $P_\gamma : (\mathbb{R}^2, g|_{\gamma(a)}) \to (\mathbb{R}^2, g|_{\gamma(b)})$ eine Isometrie, also orthogonal. Während im Euklidischen die Parallelität von Vektoren in zwei Punkten unabhängig von einer Verbindungskurve erklärt ist, hängt die Parallelverschiebung P_γ für eine Riemannsche Metrik g im allgemeinen von der Verbindungskurve γ ab. Bei der nachfolgenden Definition orientieren wir uns am Euklidischen Fall, siehe Definition 2.5, nur wird die übliche Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt.

Definition 10.3 (Geodätische Krümmung) *Sei $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2, \times\mathbb{R}^2)$ Riemannsche Metrik. Der geodätische Krümmungsvektor einer regulären Kurve $\gamma \in C^2(I, U)$ ist*

$$\vec{\varkappa}_g = \frac{1}{\|\gamma'\|_g^2} \Big(\frac{\nabla\gamma'}{dt}\Big)^{\perp_g},$$

wobei $\perp_g$ die Komponente senkrecht zu γ' bezüglich g bezeichnet. Die geodätische Krümmung bezüglich der g-Einheitsnormale $\nu \in C^0(I, \mathbb{R}^2)$ längs γ ist

$$\varkappa_g = g(\vec{\varkappa}_g, \nu) = \frac{1}{\|\gamma'\|_g^2}\, g\Big(\frac{\nabla\gamma'}{dt}, \nu\Big).$$

Die Invarianz unter Umparametrisierungen folgt wie im Euklidischen, mit etwas mehr Aufwand: für $\varphi \in C^1(J, I)$ diffeomorph gilt $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi)\varphi'$ und weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla(\gamma\circ\varphi)'}{dt} &= \frac{\nabla(\gamma'\circ\varphi)}{dt}\varphi' + (\gamma'\circ\varphi)\varphi'' \\
&= (\gamma''\circ\varphi)\,(\varphi')^2 + \Gamma(\gamma\circ\varphi)((\gamma'\circ\varphi, \gamma'\circ\varphi)\,(\varphi')^2 + (\gamma'\circ\varphi)\,\varphi''.
\end{aligned}$$

Es gilt somit $\|(\gamma\circ\varphi)'\|_g^2 = \|\gamma'\|_g^2 \circ \varphi\,(\varphi')^2$ und, da $\gamma'\circ\varphi$ tangential,

$$\vec{\varkappa}^{\gamma\circ\varphi} = \frac{1}{\|\gamma'\|_g^2}\circ\varphi\,\Big(\gamma''\circ\varphi + \Gamma(\gamma\circ\varphi)(\gamma'\circ\varphi, \gamma'\circ\varphi)\Big)^{\perp_{\gamma\circ\varphi}} = \vec{\varkappa}_g^{\gamma}\circ\varphi.$$

Natürlich vereinfacht sich die Formel für die geodätische Krümmung, wenn die Kurve bezüglich g nach der Bogenlänge parametrisiert ist, also $\|\gamma'\|_g = 1$. Denn dann haben wir

$$0 = \frac{d}{ds} g(\gamma', \gamma') = 2g\Big(\frac{\nabla\gamma'}{ds}, \gamma'\Big),$$

das heißt $\frac{\nabla\gamma'}{ds}$ ist normal und es folgt

$$\vec{\varkappa}_g = \frac{\nabla\gamma'}{ds} \quad \text{bzw.} \quad \varkappa_g = g\Big(\frac{\nabla\gamma'}{ds}, \nu\Big). \tag{10.4}$$

Beispiel 10.1 (Geodätische Krümmung für konforme Metriken) Betrachte auf dem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ die Riemannsche Metrik

$$g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij} \quad \text{wobei } u \in C^1(U).$$

Der Winkel zwischen $v, w \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ bzgl. g ist gleich dem Euklidischen Winkel, denn

$$\angle_g(v, w) = \arccos\frac{g(v, w)}{\|v\|_g\|w\|_g} = \arccos\frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|} = \angle(v, w).$$

Dagegen folgt für die Länge von Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$

$$\|v\|_g = e^u|v|.$$

Mit Definition 10.1 erhalten wir die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = (\partial_i u)\delta_{jk} + (\partial_j u)\delta_{ik} - (\partial_k u)\delta_{ij},$$

beziehungsweise für $x \in U$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$ (überprüfe für $v, w = e_i, e_j$)

$$\Gamma(x)(v,w) = \langle Du(x), v\rangle w + \langle Du(x), w\rangle v - Du(x)\langle v, w\rangle.$$

Sei nun $\gamma \in C^2(I, U)$ eine Kurve, die nach der Bogenlänge bezüglich g parametrisiert ist, und ν_g Einheitsnormale bezüglich g längs γ. Dann ist $|\gamma'| = e^{-u\circ\gamma}$, $\nu = e^{u\circ\gamma}\nu_g$ ist die Euklidische Einheitsnormale, und wir haben

$$\Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = 2\big\langle (Du)\circ\gamma, \gamma'\big\rangle\, \gamma' - (Du)\circ\gamma\, |\gamma'|^2.$$

Damit berechnen wir die geodätische Krümmung bezüglich ν_g:

$$\begin{aligned}
\varkappa_g &= g(\gamma'' + \Gamma\circ\gamma(\gamma',\gamma'), \nu_g) \\
&= e^{u\circ\gamma}\,\big\langle \gamma'' + \Gamma\circ\gamma(\gamma',\gamma'), \nu\big\rangle \\
&= e^{u\circ\gamma}|\gamma'|^2 \left\langle \frac{1}{|\gamma'|^2}\gamma'' - (Du)\circ\gamma, \nu\right\rangle \\
&= e^{-u\circ\gamma}\big(\varkappa - \langle (Du)\circ\gamma, \nu\rangle\big).
\end{aligned}$$

Hier ist $\varkappa$ die Euklidische Krümmung der ebenen Kurve γ bezüglich der Normalen ν, siehe Definition 2.3. Für das Integral der geodätischen Krümmung folgt

$$\int_I \varkappa_g\, ds_g = \int_I \Big(\varkappa - \frac{\partial u}{\partial \nu}\circ\gamma\Big)\, ds. \tag{10.5}$$

Im Euklidischen Fall trat der Krümmungsvektor in ersten Variation der Bogenlänge auf. Das gilt analog hier.

Satz 10.2 (Erste Variation der Bogenlänge) *Sei $c \in C^2(I \times (-\varepsilon, \varepsilon), U)$ mit $I = [a, b]$, und $c = c(\cdot, 0)$ sei regulär. Dann gilt bezüglich der Riemannschen Metrik $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$*

$$\frac{d}{d\varepsilon} L_g(c(\cdot,\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_I g\big(\vec{\varkappa}_g, \phi\big)\, ds_g + \Big[g\big(\tau(t), \phi(t)\big)\Big]_{t=a}^{t=b} \quad \text{für } \phi = \frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0).$$

Dabei ist τ die g-Einheitstangente von c und $ds_g = \|c'(t)\|_g\, dt$.

Beweis: Wir berechnen mit der Produktregel (10.3) und Lemma 10.2

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} L_g(c(\cdot,\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_I g\Big(\frac{\partial c}{\partial t}(t,\varepsilon), \frac{\partial c}{\partial t}(t,\varepsilon)\Big)^{\frac{1}{2}}\, dt\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_I g\Big(\frac{\nabla}{\partial\varepsilon}\frac{\partial c}{\partial t}(t,0), \tau(t)\Big)\, dt \\
&= \int_I g\Big(\frac{\nabla\phi}{\partial t}(t), \tau(t)\Big)\, dt \\
&= -\int_I g\Big(\phi(t), \frac{\nabla\tau}{dt}(t)\Big)\, dt + \Big[g\big(\tau(t), \phi(t)\big)\Big]_{t=a}^{t=b}.
\end{aligned}$$

Aber es gilt für jede reguläre Kurve mit $\tau = \frac{c'}{\|c'\|_g}$

$$\frac{\nabla\tau}{dt} = \|c'\|^{-1}\Big(\frac{\nabla c'}{dt} - g\big(\frac{\nabla c'}{dt}, \tau\big)\tau\Big) = \vec{\varkappa}_g \|c'\|_g.$$

Einsetzen liefert nun die Behauptung. $\square$

Definition 10.4 (Geodätische) *Sei* $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ *Riemannsche Metrik. Eine Kurve* $\gamma \in C^2(I, U)$ *heißt Geodätische bzgl.* g*, falls gilt:*

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma'' + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = 0.$$

Jede konstante Kurve ist geodätisch. Die nichttrivialen (nichtkonstanten) Geodätischen sind wie folgt charakterisiert.

Folgerung 10.1 *Sei* $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ *Riemannsche Metrik. Für eine nichtkonstante Kurve* $c \in C^2(I, U)$, $I = [a, b]$*, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) c *ist Geodätische.*

(2) c *hat konstante Geschwindigkeit und geodätische Krümmung Null.*

Beweis: Für jedes $c \in C^2(I, U)$ gilt nach der Produktregel (10.3)

$$\frac{d}{dt} \|c'\|_g^2 = 2\, g\big(c', \frac{\nabla c'}{dt}\big).$$

Ist c Geodätische, so ist $\|c'\|_g$ konstant ungleich null, und

$$\vec{\varkappa}_g = \frac{1}{\|c'\|_g^2} \Big(\frac{\nabla c'}{dt}\Big)^{\perp_g} = 0.$$

Ist umgekehrt $\|c'\|_g$ konstant, also ungleich Null, so folgt $\frac{\nabla c'}{dt} \perp c'$, und weiter aus $\vec{\varkappa}_g = 0$

$$\frac{\nabla c'}{dt} = \Big(\frac{\nabla c'}{dt}\Big)^{\perp_g} = \|c'\|_g^2 \vec{\varkappa}_g = 0,$$

das heißt c ist Geodätische. □

Die geodätische Gleichung ist ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in expliziter Form, das heißt $\gamma'' = F(\gamma, \gamma')$. Um lokal Geodätische zu konstruieren, kann man daher für gegebene $z_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$ das zugehörige Anfangswertproblem mit dem Satz von Picard-Lindelöf lösen:

$$\gamma'' + \Gamma \circ \gamma(\gamma', \gamma') = 0, \quad \gamma(0) = z_0,\ \gamma'(0) = v.$$

Für $g_{ij} \in C^2(U)$ gibt es ein maximales Intervall (a, b) mit $a < 0 < b$, auf dem eine Lösung existiert, und diese ist eindeutig bestimmt. Weiter besagt die allgemeine Theorie: ist $b < \infty$, so verlässt $(\gamma(t), \gamma'(t))$ für $t \nearrow b$ jede kompakte Teilmenge von $U \times \mathbb{R}^2$. In unserm Fall gilt sogar mehr, denn Folgerung 10.1 liefert die von t unabhängige Abschätzung

$$\gamma(t) \in K \subset\subset U \quad \Rightarrow \quad |\gamma'(t)| \leq C(g, K)\, \|\gamma'(t)\|_g = C(g, K)\, \|\gamma'(0)\|_g.$$

Daher muss für $b < \infty$ schon $\gamma(t)$ mit $t \nearrow b$ jede kompakte Teilmenge von U verlassen; dies gilt natürlich analog im Fall $a > -\infty$. Die höhere Differenzierbarkeit der Geodätischen ergibt sich leicht aus dem System und der Definition der Christoffelsymbole. Für eine Riemannsche Metrik $g_{ij} \in C^r(U)$ mit $r \geq 1$ ist $\Gamma_{ij}^k \in C^{r-1}(U)$, und die Geodätischen sind dann von der Klasse $C^{r+1}(I, U)$.

Für die Euklidische Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$ auf $U = \mathbb{R}^2$ lautet die geodätische Gleichung $\gamma'' = 0$. Eine Euklidische Geodätische $\gamma : [a,b] \to (\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$ ist also durch die gerade Strecke zwischen den Endpunkten gegeben, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird; insbesondere ist sie kürzeste Verbindung der Endpunkte. Für eine beliebige Riemannsche Metrik $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ sind Geodätische zumindest Kandidaten für kürzeste Verbindungen. Denn sei $c \in C^2(I,U)$, $I = [a,b]$, kürzeste Verbindung der Endpunkte $c(a)$ und $c(b)$, und c sei nach der g-Bogenlänge parametrisiert. Ist dann $c \in C^2(I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), U)$ mit

$$c(\cdot, 0) = c \quad \text{sowie } c(a,\varepsilon) = c(a),\, c(b,\varepsilon) = c(b) \text{ für alle } \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

so folgt aus Satz 10.2 notwendig

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} L_g(c(\cdot,\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_I g(\vec{\varkappa}_g, \phi)\, ds_g \quad \text{ für } \phi = \frac{\partial c}{\partial \varepsilon}(\cdot, 0).$$

Für jedes $\phi \in C^2_c((a,b),\mathbb{R}^2)$ ist die Variation $c(t,\varepsilon) = c(t) + \varepsilon\phi(t)$ hier zulässig. Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt, dass c geodätische Krümmung Null hat und damit eine Geodätische ist. Hier schließen sich interessante Fragen an, die auch im Appendix untersucht werden:

- Sind Geodätische hinreichend oft differenzierbar, und sind sie regulär?
- Gibt es Kriterien, dass eine Geodätische kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte ist?
- Gibt es zu zwei Punkten immer eine kürzeste Verbindung?

Wir kommen nun kurz zu den parametrisierten Flächen im $\mathbb{R}^3$ zurück. Im folgenden Lemma sei $f(\gamma)$ statt $f \circ \gamma$ aus Gründen der Übersichtlichkeit.

Lemma 10.3 *Sei $F \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit Normale N, $\gamma \in C^2(I,U)$ und $\xi \in C^1(I,\mathbb{R}^2)$. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}\big(DF(\gamma)\cdot\xi\big) = DF(\gamma)\cdot\frac{\nabla\xi}{dt} + h(\gamma)(\gamma',\xi)\, N(\gamma).$$

Dabei ist ∇ die kovariante Ableitung von g und h die zweite Fundamentalform bezüglich N.

Beweis: Wir berechnen mit den Ableitungsgleichungen, Satz 9.3,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(DF(\gamma)\cdot\xi) &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{2}(\partial_j F)(\gamma)\xi^j \\
&= \sum_{j=1}^{2}(\partial_j F)(\gamma)\,(\xi^j)' + \sum_{i,j=1}^{2}(\partial^2_{ij}F)(\gamma)\,(\gamma^i)'\xi^j \\
&= \sum_{j=1}^{2}(\partial_j F)(\gamma)\,(\xi^j)' + \sum_{i,j,k=1}^{2}\Gamma^k_{ij}(\gamma)\,(\gamma^i)'\xi^j\partial_k F(\gamma) + \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(\gamma)\,(\gamma^i)'\xi^j N(\gamma) \\
&= DF(\gamma)\cdot\Big(\frac{d\xi}{dt} + \Gamma(\gamma)(\gamma',\xi)\Big) + h(\gamma)\big(\gamma',\xi\big)\, N(\gamma).
\end{aligned}$$

Nach Satz 9.2 sind die Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole der Metrik, und das Lemma ist bewiesen. $\square$

Wir können jetzt die klassische Charakterisierung der Geodätischen auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ herleiten, die auf Johann Bernoulli (1698) zurückgeht. Sie besagt, dass geodätische Kurven keine Beschleunigung tangential zur Fläche haben.

Satz 10.3 *Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g und Normale N, und $\gamma \in C^2(I, U)$. Mit $c = F \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *γ ist Geodätische bezüglich g.*

(2) $(c'')^\top = 0$.

(3) $c'' = h(\gamma', \gamma')N$.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 10.3, indem wir dort $\xi = \gamma'$ setzen:

$$c'' = (F \circ \gamma)'' = DF \cdot \frac{\nabla \gamma'}{dt} + h(\gamma', \gamma')N.$$

$\square$

Eine explizite Lösung der geodätischen Differentialgleichung ist im allgemeinen nicht möglich. Für Rotationsflächen hat man einen Erhaltungssatz, mit dessen Hilfe die Geodätischen qualitativ gut beschrieben werden können, siehe Band 3, pp. 315-319, in M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Boston 1975. Der Erhaltungssatz folgt aus der Tatsache, dass Drehungen um die Rotationsachse Isometrien der Fläche sind.

Beispiel 10.2 Betrachte für eine C^2-Kurve $c(t) = (r(t), h(t))$, $t \in J$, die Rotationsfläche

$$F : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t)),$$

wobei c regulär und $r(t) > 0$. Die erste Fundamentalform von F lautet

$$g(t, \varphi) = \big(\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2\big)dt^2 + d\varphi^2.$$

Sei $\gamma(s) = (t(s), \varphi(s))$, $s \in [a, b]$, eine gegebene Kurve. Dann folgt für $\gamma_\alpha(s) = \big(t(s), \varphi(s) + \alpha\big)$

$$L_g(\gamma_\alpha) = \int_a^b \sqrt{\big(\dot{r}(t(s))^2 + \dot{h}(t(s))^2\big)t'(s)^2 + \varphi'(s)^2}\, ds = L_g(\gamma).$$

Ist γ Geodätische, so ergibt sich aus der Variationsformel, Satz 10.2,

$$0 = \frac{d}{d\alpha} L_g(\gamma_\alpha)|_{\alpha=0} = \Big[g\Big(e_2, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big)\Big]_{s=a}^{s=b}.$$

Da die Grenzen a und b beliebig gewählt werden können, bedeutet das:

$$g\Big(e_2, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big) \text{ ist längs jeder Geodätischen } \gamma \text{ konstant.}$$

Die Kurve $F \circ \gamma_\alpha$ ergibt sich durch Rotation von $F \circ \gamma$ um die z-Achse, genauer gilt

$$F \circ \gamma_\alpha = S_\alpha \cdot (F \circ \gamma) \quad \text{ mit } S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $c = F \circ \gamma$, und schreibe $c(s) = (\varrho(s)\cos\varphi(s), \varrho(s)\sin\varphi(s), z(s))$. Dann gilt

$$g\Big(e_2, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|_g}\Big) = \varrho \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{c'}{|c'|} \right\rangle.$$

Damit hat der Erhaltungssatz in $\mathbb{R}^3$ folgende Interpretation.

> **Satz von Clairaut:** *bezeichnet $\beta(s) \in [0,\pi]$ den Winkel, mit dem die Geodätische $c(s)$ den Breitenkreis in Höhe $z(s)$ mit Radius $\varrho(s)$ schneidet, so ist $\varrho(s)\cos\beta(s)$ konstant.*

Zum Schluss des Kapitels untersuchen wir das Transformationsverhalten der geodätischen Krümmung und der kovarianten Ableitung unter Isometrien.

Definition 10.5 (Riemannsche Isometrie) *Seien g, h Riemannsche Metriken der Klasse C^1 auf den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Ein C^1-Diffeomorphismus $\phi : (U,g) \to (V,h)$ heißt (Riemannsche) Isometrie, wenn gilt:*

$$h(\phi(x))(D\phi(x)v, D\phi(x)w) = g(x)(v,w) \quad \text{für alle } x \in U,\ v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Mit anderen Worten: für jedes $x \in U$ ist die lineare Abbildung

$$D\phi(x) : \big(\mathbb{R}^2, g(x)\big) \to \big(\mathbb{R}^2, h(\phi(x))\big)$$

eine orthogonale Abbildung der Skalarprodukträume. Für eine Kurve $\gamma : I \to U$ gilt

$$\big\|(\phi\circ\gamma)'\big\|_h = \big\|D\phi(\gamma)\cdot\gamma'\big\|_h = \big\|\gamma'\big\|_g,$$

insbesondere ist $L_g(\gamma) = L_h(\phi \circ \gamma)$, also ist ϕ längentreu.

Satz 10.4 (Invarianz der geodätischen Krümmung) *Sei $\phi : (U,g) \to (V,h)$ eine Riemannsche Isometrie. Ist $\gamma \in C^2(I,U)$, $I = [a,b]$, eine reguläre Kurve, so gilt*

$$\vec{\varkappa}_h^{\phi\circ\gamma} = (D\phi)(\gamma) \cdot \vec{\varkappa}_g^{\gamma}. \tag{10.6}$$

Ist ν_g^γ Einheitsnormale längs γ, so ist $\nu_h^{\phi\circ\gamma} = D\phi(\gamma)\cdot\nu_g^\gamma$ Einheitsnormale längs $\phi\circ\gamma$ und für die skalaren geodätischen Krümmungen gilt $\varkappa_h^{\phi\circ\gamma} = \varkappa_g^\gamma$.

Beweis: Sei $\gamma(t,\varepsilon) = \gamma(t) + \varepsilon X(t)$ für $X \in C^2(I,\mathbb{R}^2)$ mit $X(a) = X(b) = 0$, das heißt $\frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon}(t,0) = X(t)$. Dann ist $L_h(\phi\circ\gamma(\cdot,\varepsilon)) = L_g(\gamma(\cdot,\varepsilon))$, und Satz 10.2

ergibt

$$\begin{aligned}
-\int_I h(\phi\circ\gamma)\big(\vec{\varkappa}_h^{\phi\circ\gamma}, D\phi(\gamma)\cdot X\big)\, ds_h &= \frac{d}{d\varepsilon} L_h(\phi\circ\gamma(\cdot,\varepsilon))|_{\varepsilon=0}\\
&= \frac{d}{d\varepsilon} L_g(\gamma(\cdot,\varepsilon))|_{\varepsilon=0}\\
&= -\int_I g(\gamma)\big(\vec{\varkappa}_g^{\gamma}, X\big)\, ds_g.
\end{aligned}$$

Weiter liefert die Isometrieeigenschaft (angewandt von rechts nach links)

$$\int_I h(\phi\circ\gamma)\big(\vec{\varkappa}_h^{\phi\circ\gamma}, D\phi(\gamma)\cdot X\big)\, \big\|(\phi\circ\gamma)'\big\|_h\, dt = \int_I g(\gamma)\big(D\phi(\gamma)^{-1}\vec{\varkappa}_h^{\phi\circ\gamma}, X\big)\, \big\|\gamma'\big\|_g\, dt.$$

Es folgt für jedes Vektorfeld X mit Nullrandwerten

$$\int_I g(\gamma)\big(D\phi(\gamma)^{-1}\vec{\varkappa}_h^{\phi\circ\gamma} - \vec{\varkappa}_g^{\gamma}, X\big)\, \big\|\gamma'\big\|_g\, dt = 0.$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechung ergibt sich die behauptete Formel (10.6). Die Aussage über die Einheitsnormalen folgt direkt aus der Isometrieeigenschaft von $D\phi(\gamma)$. Für die skalaren Krümmungen gilt dann

$$\varkappa_h^{\phi\circ\gamma} = h(\phi\circ\gamma)(\vec{\varkappa}_h^{\phi\circ\gamma}, \nu_h^{\phi\circ\gamma}) = h(\phi\circ\gamma)(D\phi(\gamma)\cdot\vec{\varkappa}_g^{\gamma}, D\phi(\gamma)\cdot\nu_g^{\gamma}) = g(\gamma)(\vec{\varkappa}_g^{\gamma}, \nu_g^{\gamma}) = \varkappa_g^{\gamma}.$$

□

Die Transformation der vollen kovarianten Ableitung wollen wir auf die geodätische Krümmung zurückführen. Vorab eine Hilfsaussage, die nichts mit der Riemannschen Metrik zu tun hat. Zur Erinnerung: der Kommutator von $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ist

$$[\xi,\eta] = D\eta\cdot\xi - D\xi\cdot\eta = \sum_{i,j=1}^{2} (\xi^i\partial_i\eta^j - \eta^i\partial_i\xi^j)e_j.$$

Für eine Abbildung $\phi \in C^2(U,V)$ heißen $\xi \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\xi} \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$ ϕ-verwandt, wenn

$$\tilde{\xi}\circ\phi = D\phi\cdot\xi \quad \text{auf } U.$$

Lemma 10.4 *Seien $\xi,\eta \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$ ϕ-verwandt zu $\tilde{\xi},\tilde{\eta} \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$. Dann sind $[\xi,\eta]$ und $[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]$ ebenfalls ϕ-verwandt:*

$$[\tilde{\xi},\tilde{\eta}]\circ\phi = D\phi\cdot[\xi,\eta].$$

Beweis: Wir berechnen mit der Eigenschaft (8.3) des Kommutators

$$\begin{aligned}
D\phi\cdot[\xi,\eta] &= \partial_\xi\big(\partial_\eta\phi\big) - \partial_\eta\big(\partial_\xi\phi\big)\\
&= \partial_\xi\big(\tilde{\eta}\circ\phi\big) - \partial_\eta\big(\tilde{\xi}\circ\phi\big)\\
&= (D\tilde{\eta})\circ\phi\cdot D\phi\cdot\xi - (D\tilde{\xi})\circ\phi\cdot D\phi\cdot\eta\\
&= (D\tilde{\eta})\circ\phi\cdot\tilde{\xi}\circ\phi - (D\tilde{\xi})\circ\phi\cdot\tilde{\eta}\circ\phi\\
&= \big(D\tilde{\eta}\cdot\tilde{\xi} - D\tilde{\xi}\cdot\tilde{\eta}\big)\circ\phi\\
&= [\tilde{\xi},\tilde{\eta}]\circ\phi.
\end{aligned}$$

□

Satz 10.5 *Sei $\phi : (U,g) \to (V,h)$ Riemannsche Isometrie, und $\tilde{X}, \tilde{Y} \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$ seien ϕ-verwandt zu $X, Y \in C^2(U,\mathbb{R}^2)$. Dann sind $\nabla^h_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ und $\nabla^g_X Y$ auch ϕ-verwandt:*
$$\big(\nabla^h_{\tilde{X}}\tilde{Y}\big) \circ \phi = D\phi \cdot \nabla^g_X Y.$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage zuerst für $Y = X$ in einem beliebigen Punkt $x_0 \in U$. Sei zunächst $\|X\|_g \equiv 1$ nahe bei x_0. Dann betrachte die Integralkurve $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ von X durch x_0, das heißt die Lösung des Anfangswertproblems

$$\gamma'(s) = X(\gamma(s)) \text{ für } s \in (-\varepsilon,\varepsilon), \quad \gamma(0) = x_0.$$

Für $\varepsilon > 0$ klein existiert γ nach Picard-Lindelöf und ist eine C^2-Kurve. Wir haben

$$\begin{aligned}
\nabla_X X(x_0) &= D_X X(x_0) + \Gamma(x_0)(X(x_0), X(x_0))\\
&= \gamma''(0) + \Gamma(\gamma(0))(\gamma'(0), \gamma'(0))\\
&= \frac{\nabla \gamma'}{ds}(0)\\
&= \vec{\varkappa}_g(0).
\end{aligned}$$

Da $\tilde{X}$ normiert ist bezüglich h und $\phi \circ \gamma$ Integralkurve von $\tilde{X}$, erhalten wir aus der Transformation der geodätischen Krümmung

$$D\phi(x_0)\nabla_X X(x_0) = D\phi(x_0) \cdot \vec{\varkappa}^{\gamma}_g(0) = \vec{\varkappa}^{\phi\circ\gamma}_h(0) = \nabla_{\tilde{X}}\tilde{X}(\phi(x_0)).$$

Als nächstes betrachte $X = \lambda\xi$, wobei λ beliebige Funktion und $\|\xi\|_g \equiv 1$ nahe bei x_0. Sind $\tilde{\xi}$, $\tilde{X}$ die ϕ-verwandten Vektorfelder und $\tilde{\lambda} \circ \phi = \lambda$, so gilt $\tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{\xi}$ und
$$(d\tilde{\lambda} \cdot \tilde{\xi}) \circ \phi = (d\tilde{\lambda}) \circ \phi \cdot D\phi \cdot \xi = d\lambda \cdot \xi.$$

Damit berechnen wir

$$(\nabla^h_{\tilde{X}}\tilde{X}) \circ \phi = \big(\tilde{\lambda}^2 \nabla^h_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi} + \tilde{\lambda}(d\tilde{\lambda}\cdot\tilde{\xi})\tilde{\xi}\big) \circ \phi = D\phi \cdot \Big(\lambda^2 \nabla^g_{\xi}\xi + \lambda(d\lambda\cdot\xi)\xi\Big) = D\phi \cdot \nabla^g_X X.$$

Jedes Vektorfeld X mit $X(x_0) \neq 0$ hat lokal die Form $X = \lambda\xi$ für $\lambda = \|X\|_g$ und $\|\xi\|_g = 1$. Da im Fall $X(x_0) = 0$ beide Seiten Null sind, ist die Behauptung des Satzes im Fall $X = Y$ gezeigt. Allgemein schreiben wir schließlich mit der Linearität und Symmetrie der kovarianten Ableitung, siehe (1) und (4) in Satz 10.1,
$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\Big(\nabla_{X+Y}(X+Y) - \nabla_X X - \nabla_Y Y + [X,Y]\Big).$$
Nach dem Gezeigten und Lemma 10.4 erfüllen alle Terme auf der rechten Seite das gewünschte Transformationsgesetz, womit der Satz insgesamt bewiesen ist.
□

11 Der Satz von Gauß-Bonnet

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Gauß-Bonnet auf Riemannschen Gebieten D. Wir geben einen Ausblick auf den Fall wenn D eine kompakte Fläche mit Rand im $\mathbb{R}^3$ ist, bzw. abstrakter eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir beginnen mit dem Spezialfall konformer Metriken, weil die Herleitung dann direkt ist.

Beispiel 11.1 Sei $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ eine konforme Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Definieren wir die Gaußsche Krümmung K_g durch die Formel aus dem Theorema egregium, so ergibt sich

$$K_g e^{2u} = \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^1_{12} + \sum_{\mu=1}^{2} (\Gamma^1_{1\mu}\Gamma^\mu_{22} - \Gamma^1_{2\mu}\Gamma^\mu_{12}).$$

Nach Beispiel 10.1 sind die Christoffelsymbole der konformen Metrik gleich

$$\begin{array}{cccccc} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \\ \partial_1 u & \partial_2 u & -\partial_1 u & -\partial_2 u & \partial_1 u & \partial_2 u. \end{array}$$

Durch Einsetzen ergibt sich die Formel von Liouville

$$-\Delta u = K_g e^{2u}. \tag{11.1}$$

Sei nun $D \subset\subset U$ ein Gebiet mit C^2-Rand. Es sei ν die innere Normale und $\varkappa$ die Krümmung von ∂D bezüglich der Euklidischen Metrik. Mit der Formel für die geodätische Krümmung $\varkappa_g$ aus Beispiel 10.1 und dem Satz von Gauß folgt

$$\int_D K_g \, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g \, ds_g = -\int_D \Delta u \, dxdy + \int_{\partial D} \Big(\varkappa - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) \, ds = \int_{\partial D} \varkappa \, ds.$$

Für ∂D zusammenhängend folgt aus dem Umlaufsatz, genauer (4.1) sowie (4.2),

$$\int_D K_g \, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g \, ds_g = 2\pi.$$

Um den Fall einer beliebigen Riemannschen Metrik auf den konformen Fall zu reduzieren, braucht man die Theorie elliptischer Differentialgleichungen, vgl. Satz 6.2. In dieser Vorlesung wird das nicht behandelt, wir geben stattdessen einen unabhängigen Beweis. Dazu betrachten wir eine geometrisch motivierte Differentialform, die Zusammenhangsform.

Wir fassen kurz ein paar Fakten zu Differentialformen zusammen, siehe auch Definition 3.1. Eine 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^2$ hat die Form $\omega = \omega_1 \, dx^1 + \omega_2 \, dx^2$, ihr Integral längs einer Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$ ist

$$\int_\gamma \omega = \int_I \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_I \sum_{i=1}^{2} \omega_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, dt.$$

Das Integral ist invariant unter richtungstreuen Umparametrisierungen. Deshalb kann ω auch längs des Randes ∂D eines Gebiets $D \subset\subset U$ integriert werden: man parametrisiert die einzelnen Randkurven und addiert. Zum Durchlaufungssinn wird vereinbart, dass γ', $\nu \circ \gamma$ positiv orientiert sind, wobei ν die innere Normale ist, D liegt also in Fahrtrichtung links.

Definition 11.1 *Bezeichne mit $dx^1 \wedge dx^2$ die Bilinearform*

$$(dx^1 \wedge dx^2)(v,w) = \det(v,w) \quad (v,w \in \mathbb{R}^2).$$

Eine Funktion $\phi = f\,dx^1 \wedge dx^2$ mit $f : U \to \mathbb{R}$ heißt 2-Form. Das Integral auf $D \subset\subset U$ ist definiert durch

$$\int_D \phi = \int_D f(x)\,dx.$$

Definition 11.2 *Die äussere Ableitung von $\omega = \omega_1\,dx^1 + \omega_2\,dx^2$ ist die 2-Form*

$$d\omega = \Big(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\Big)\,dx^1 \wedge dx^2.$$

Satz 11.1 (Stokes) *Sei ω 1-Form auf U mit Koeffizienten $\omega_i \in C^1(U)$. Ist $D \subset\subset U$ Gebiet mit C^1-Rand, so gilt*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Beweis: Wir betrachten das Vektorfeld $X = (-\omega_2, \omega_1)$, also $d\omega = -\mathrm{divX}\,dx^1 \wedge dx^2$. Es folgt, wenn ν die innere Normale auf ∂D bezeichnet, mit dem Satz von Gauß

$$\int_D d\omega = -\int_D \mathrm{div}X\,dx = \int_{\partial D} \langle X, \nu\rangle\,ds.$$

Sei $\gamma : I \to \partial D$ Parametrisierung nach der Bogenlänge mit γ', $\nu \circ \gamma$ positiv orientiert. Da $\omega_1 = X_2$ und $\omega_2 = -X_1$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_I \big(X_2(\gamma(s))\,\gamma_1'(s) - X_1(\gamma(s))\,\gamma_2'(s)\big)\,ds \\
&= \int_I \langle X(\gamma(s)), (-\gamma_2'(s), \gamma_1'(s))\rangle\,ds \\
&= \int_I \langle X, \nu\rangle\,ds.
\end{aligned}$$

Das zeigt $\int_{\partial D} \langle X, \nu\rangle\,ds = \int_{\partial D} \omega$, und der Satz ist bewiesen. □

Als nächstes brauchen wir eine Formel aus der Linearen Algebra.

Lemma 11.1 (90°-Drehung) *Sei $(g_{ij}) \in C^k(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gibt es genau eine Abbildung $J_g \in C^k(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt:*

(1) $g(J_g v, v) = 0$,

(2) $g(J_g v, J_g v) = g(v,v)$,

(3) $\det(v, J_g v) > 0$ *falls* $v \neq 0$.

Beweis: Angenommen wir haben J_g mit den Eigenschaften (1),(2) und (3). Dann gilt

$$0 = g(J_g v, v) = \langle G J_g v, v\rangle_{\mathbb{R}^2} \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2.$$

Also ist GJ_g schiefsymmetrisch, das heißt

$$GJ_g = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda : U \to \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $\det J_g \geq 0$. Aus (2) folgt mittels Polarisation für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$

$$\langle GJ_g v, J_g w\rangle = g(J_g v, J_g w) = g(v,w) = \langle Gv, w\rangle.$$

Das bedeutet $J_g^{\mathrm{T}} G J_g = G$, insbesondere $\det J_g = 1$. Es folgt weiter

$$J_g = \pm\sqrt{\det G}\, G^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{\det G}} \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix}.$$

Nach (3) ist $0 < \det(e_1, J_g e_1) = \pm g_{11}/\sqrt{\det G}$, also gilt das $+$-Zeichen. Umgekehrt rechnet man nun nach, dass (1), (2) und (3) mit dieser Definition von J_g gelten. Wir berechnen noch zur Information

$$J_g^2 = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} -g_{12} & -g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix}^2 = -\mathrm{Id}.$$

$\square$

Im Folgenden sei $(g_{ij}) \in C^2(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik mit 90°-Drehung J_g und Levi-Civita Zusammenhang $\nabla_X Y$. Das folgende Lemma besagt, dass das Endomorphismenfeld J_g parallel ist, also $\nabla J_g = 0$.

Lemma 11.2 *Für Vektorfelder $X, Y \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ gilt $\nabla_X (J_g Y) = J_g \nabla_X Y$.*

Beweis: Wir berechnen mit der Produktregel

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(J_gY), Y) &= D_X \underbrace{g(J_gY, Y)}_{=0} - g(J_gY, \nabla_X Y) = g(J_g \nabla_X Y, Y), \\ g(\nabla_X(J_gY), J_gY) &= \frac{1}{2} D_X \underbrace{g(J_gY, J_gY)}_{=g(Y,Y)} = g(\nabla_X Y, Y) = g(J_g\nabla_X Y, J_g Y). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung wenn $Y \neq 0$. Ist $Y(x) = 0$, so berechne im Punkt x

$$\nabla_X(J_gY) = D_X(J_gY) + \underbrace{\Gamma(X, J_gY)}_{=0} = J_g(D_XY + \underbrace{\Gamma(X,Y)}_{=0}) = J_g \nabla_X Y.$$

$\square$

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Problem zurück.

Definition 11.3 (Zusammenhangsform) *Sei $(g_{ij}) \in C^1(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Ist $v \in C^2(U, \mathbb{R}^2)$ ein Einheitsvektorfeld, also $\|v\|_g = \sqrt{g(v,v)} = 1$ auf U, so definieren wir die Zusammenhangsform bezüglich v durch*

$$\omega^v(X) = g(\nabla_X v, J_g v).$$

Proposition 11.1 *Die Zusammenhangsform ω^v hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Sei $\gamma \in C^2(I,U)$ mit $\|\gamma'\|_g = 1$ gegeben. Wähle $\theta \in C^1(I)$ mit $v \circ \gamma = \cos\theta\,\gamma' + \sin\theta\, J_g\gamma'$, siehe Satz 3.2. Dann folgt bezüglich der Normalen $J_g\gamma'$*

$$\omega^v(\gamma') = \theta' + \varkappa_g. \tag{11.2}$$

(b) *Die äußere Ableitung der Zusammenhangsform ist*

$$d\omega^v = -K_g \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge dx^2. \tag{11.3}$$

Beweis: Um (11.2) zu zeigen, berechnen wir die Ableitung

$$\nabla_{\gamma'} v = \theta'\,(-\sin\theta\,\gamma' + \cos\theta\, J_g\gamma') + \cos\theta\,\varkappa_g J_g\gamma' - \sin\theta\,\varkappa_g\gamma'.$$

Skalarmultiplikation mit $J_g v = \cos\theta\, J_g\gamma' - \sin\theta\,\gamma'$ ergibt wegen $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\omega^v(\gamma') = \theta' + \varkappa_g.$$

Auch (11.3) folgt durch Rechnung, die aber länger ist. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
\partial_1\omega_2^v - \partial_2\omega_1^v &= \partial_1 g(\nabla_2 v, J_g v) - \partial_2 g(\nabla_1 v, J_g v)\\
&= g(\nabla_1\nabla_2 v - \nabla_2\nabla_1 v, J_g v) + g(\nabla_2 v, J_g\nabla_1 v) - g(\nabla_1 v, J_g\nabla_2 v).
\end{aligned}$$

Dabei wurde Lemma 11.2 benutzt. Da $0 = \frac{1}{2}\partial_i\, g(v,v) = g(\nabla_i v, v)$, sind $\nabla_1 v$, $\nabla_2 v$ linear abhängig. Deshalb folgt

$$\partial_1\omega_2^v - \partial_2\omega_1^v = g(\nabla_1\nabla_2 v - \nabla_2\nabla_1 v, J_g v). \tag{11.4}$$

Wir brauchen nun zwei Tatsachen. Die erste besagt

$$(\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)(\varphi X) = \varphi(\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)X \quad \text{für } \varphi \in C^2(U). \tag{11.5}$$

Um das zu zeigen, berechnen wir mit den Regeln für ∇

$$(\nabla_1\nabla_2)(\varphi X) = \nabla_1\big(\varphi\nabla_2 X + (\partial_2\varphi)X\big) = \varphi\nabla_1\nabla_2 X + (\partial_1\varphi)\nabla_2 X + (\partial_2\varphi)\nabla_1 X + (\partial_{12}^2\varphi)X.$$

Bei Vertauschen von ∇_1, ∇_2 und Subtraktion fallen die hinteren Terme weg, und (11.5) folgt. Die zweite benötigte Formel ist

$$g\big((\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)X, Y\big) + g\big(X, (\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1)Y\big) = 0. \tag{11.6}$$

Dazu verwenden wir wieder die Regeln für ∇, und zwar ist

$$g(\nabla_1\nabla_2 X, X) = \partial_1 g(\nabla_2 X, X) - g(\nabla_2 X, \nabla_1 X) = \frac{1}{2}\partial_1\partial_2\, g(X,X) - g(\nabla_1 X, \nabla_2 X).$$

Vertauschen von ∇_1, ∇_2 und Subtraktion ergibt (11.6) im Fall $X = Y$, und daraus folgt die allgemeine Version für X, Y beliebig durch Polarisierung.

Als nächstes berechnen wir

$$\begin{aligned}\nabla_1\nabla_2 e_2 &= \nabla_1\Big(\sum_{j=1}^2 \Gamma_{22}^j e_j\Big) = \sum_{k=1}^2 \Big(\partial_1\Gamma_{22}^k + \sum_{j=1}^2 \Gamma_{1j}^k\Gamma_{22}^j\Big)\, e_k,\\ \nabla_2\nabla_1 e_2 &= \nabla_2\Big(\sum_{j=1}^2 \Gamma_{12}^j e_j\Big) = \sum_{k=1}^2 \Big(\partial_2\Gamma_{12}^k + \sum_{j=1}^2 \Gamma_{2j}^k\Gamma_{12}^j\Big)\, e_k,\end{aligned}$$

Es ergibt sich weiter

$$g\big((\nabla_1\nabla_2-\nabla_2\nabla_1)e_2, e_1\big) = \sum_{k=1}^2 g_{k1}\Big(\partial_1\Gamma_{22}^k-\partial_2\Gamma_{12}^k+\sum_{j=1}^2 \Gamma_{1j}^k\Gamma_{22}^j-\Gamma_{2j}^k\Gamma_{12}^j\Big) = K_g\ \det(G).$$

Hier ist K_g die Gaußsche Krümmung wie im Theorema egregium, siehe Folgerung 9.2. Stellen wir $v, J_g v$ in der Standardbasis dar, so folgt mit (11.5) und (11.6)

$$g\big((\nabla_1\nabla_2-\nabla_2\nabla_1)v, J_g v\big) = K_g \det(G)\,\big(v^2(J_g v)^1 - v^1(J_g v)^2\big).$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix mit Spalten $v, J_g v$. Da $v, J_g v$ eine Orthonormalbasis bzgl. g ist, gilt

$$A^\top G\, A = E_2, \quad \text{insbesondere } (\det A)^2 = \frac{1}{\det G}.$$

Nun ist $\det A > 0$ nach Definition von J_g, und somit

$$v^1(Jv)^2 - v^2(Jv)^1 = \det A = \frac{1}{\sqrt{\det G}}.$$

Mit (11.4) ergibt sich schließlich

$$\partial_1\omega_2^v - \partial_2\omega_1^v = g(\nabla_1\nabla_2 v - \nabla_2\nabla_1 v, J_g v) = -K_g\sqrt{\det G}.$$

Damit ist Behauptung (11.3) ebenfalls verifiziert. □

Satz 11.2 (Gauß-Bonnet) *Sei $D \subset (U,g)$ beschränktes Gebiet mit zusammenhängendem C^2-Rand. Dann gilt*

$$\int_D K_g\, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\, ds_g = 2\pi.$$

Dabei ist $\varkappa_g$ geodätische Krümmung bzgl. der inneren Normale.

Beweis: Wir betrachten auf U das Einheitsvektorfeld $v = e_1/\sqrt{g_{11}}$. Sei $\gamma : [0,L] \to \partial D$ Parametrisierung nach der Bogenlänge, mit $\gamma', \nu\circ\gamma$ positiv orientiert. Wir schreiben $v\circ\gamma = \cos\theta\gamma' + \sin\theta J_g\gamma'$ mit $\theta \in C^1([0,L])$. Aus Proposition 11.1 und dem Satz von Stokes folgt

$$\int_D K_g\, dA_g = -\int_D d\omega^v = -\int_{\partial D} \omega^v(\gamma')\, ds_g = -\int_{\partial D} \theta'\, ds_g - \int_{\partial D} \varkappa_g\, ds_g.$$

Aber $\cos\theta(L) = \cos\theta(0)$ und $\sin\theta(L) = \sin\theta(0)$, also folgt

$$\int_D K_g\, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\, ds_g \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{11.7}$$

Wir betrachten (11.7) nun für die Schar von Metriken

$$g_{ij}^t = t g_{ij} + (1-t)\delta_{ij} \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Es gibt ein $\lambda > 0$ mit $g(x)(\xi,\xi) \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $x \in \overline{D}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, also folgt

$$g^t(x)(\xi,\xi) = t g(x)(\xi,\xi) + (1-t)|\xi|^2 \geq \big(t\lambda + (1-t)\big)\,|\xi|^2 \geq \min(\lambda,1)\,|\xi|^2.$$

Also gilt g_{ij}^t, $(g^t)^{ij} \in C^2(\overline{D}\times[0,1])$. Aus den Koordinatendarstellungen der Terme K_g, $\varkappa_g$, dA_g und ds_g folgt, dass die beiden Integrale in (11.7) stetig von $t \in [0,1]$ abhängen. Aber ihre Summe ist in $2\pi\mathbb{Z}$, somit ist sie konstant für alle $t \in [0,1]$. Mit $t = 0$ folgt aus dem Hopf Umlaufsatz, vgl. Beispiel 11.1,

$$\int_D K_g\, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\, ds_g = \int_{\partial D} \varkappa\, ds = 2\pi.$$

$\square$

Wir wollen den Satz von Gauß-Bonnet auf beliebige kompakte Flächen verallgemeinern. Die Strategie ist dabei, die Fläche in Riemannsche Dreiecke zu zerlegen, auf denen jeweils eine Version des Satzes aufgestellt werden kann. Die Gleichungen auf den einzelnen Dreiecken sollen dann summiert werden. Für diesen Zugang brauchen wir eine Version des Satzes für Gebiete mit Ecken. Ein Spezialfall ist die sphärische Trigonometrie, dort werden Dreiecke auf $\S^2$betrachtet, die durch Großkreisbögen berandet sind. Unsere Behandlung der Ecken ist vom Ansatz hr klar, leider aber etwas technisch.

Definition 11.4 (stückweise C^2-Gebiet) *Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ hat stückweise C^2-Rand, wenn für jedes $p \in \partial D$ ein $S \in \mathbb{SO}(2)$ und $R = (-\varepsilon,\varepsilon) \times J$ existieren, so dass gilt:*

$$S(D-p) \cap R = \{(x,y) \in R : y > u(x)\}.$$

Dabei soll $u : (-\varepsilon,\varepsilon) \to J$ stetig sein, und C^2 auf $(-\varepsilon,0]$ sowie $[0,\varepsilon)$.

Betrachte erst $u \in C^2((-\varepsilon,\varepsilon))$. Die Einheitstangente des Graphen ist dann

$$\tau(x) = \frac{(1,u'(x))}{\sqrt{1+u'(x)^2}}.$$

Es gilt $\tau(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ mit der Winkelfunktion

$$\theta : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big),\ \theta(x) = \arctan u'(x).$$

Sei jetzt $u \in C^2$ nur auf $[-\varepsilon,0]$ und $[0,\varepsilon]$, insbesondere können die Grenzwerte $u'_\pm(0)$ verschieden sein. In diesem Fall sprechen wir von einer Ecke, mit dem Außenwinkel

$$\alpha = \theta_+(0) - \theta_-(0) \in (-\pi,\pi).$$

Der Innenwinkel ergibt sich als $\omega = \pi - \alpha \in (0, 2\pi)$. Um den Graph glatt zu ersetzen, wähle zu $\varrho \in (0, \varepsilon)$ eine Abschneidefunktion $\eta \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon))$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x| \geq \frac{\varrho}{2}$ und $\eta(x) = 0$ für $|x| \leq \frac{\varrho}{4}$. Dann ist $u^\varrho(x) = \eta(x)u(x)$ ein C^2-Graph auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Für die zugehörige Winkelfunktion θ^ϱ folgt mit $\varrho \to 0$

$$\theta^\varrho(\varrho) - \theta^\varrho(-\varrho) \longrightarrow \theta_+(0) - \theta_-(0) = \alpha.$$

Satz 11.3 (Gauß-Bonnet mit Ecken) *$g \in C^2(U, \mathbb{R}^{2\times 2})$ Riemannsche Metrik, und $D \subset\subset U$ sei beschränktes Gebiet mit ∂D zusammenhängend und stückweise C^2. Dann gilt*

$$\int_D K_g \, dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g \, ds_g + \sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\pi.$$

Die α_i sind die Außenwinkel in den Ecken p_i für $i = 1, \ldots, N$.

Beweis: Wir verallgemeinern erst den Umlaufsatz auf die Situation mit Ecken. In jedem p_i haben wir (bis auf Translation und Drehung) eine Graphendarstellung $y = u_i(x)$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir ersetzen $u_i(x)$ auf $[-\varrho, \varrho] \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ durch $u_i^\varrho(x)$. Dies ergibt ein Gebiet D^ϱ mit C^2-Rand, der zusammenhängend ist. Es folgt aus dem Umlaufsatz, bzw. (4.1) sowie (4.2),

$$\int_{\partial D^\varrho} \varkappa^\varrho(s) \, ds = 2\pi.$$

Bezeichne die Graphen der u_i^ϱ auf $[-\varrho, \varrho]$ mit Γ_i^ϱ. Wegen der Eindeutigkeit der Winkelfunktion bis auf Konstanten gilt wie oben berechnet

$$\int_{\Gamma_i^\varrho} \varkappa^\varrho(s) \, ds = \theta_i^\varrho(\varrho) - \theta_i^\varrho(-\varrho) \longrightarrow \alpha_i.$$

Aber $\partial D^\varrho = \partial D$ bis auf die Graphen Γ_i^ϱ. Da ∂D stückweise C^2 ist, folgt

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\partial D^\varrho \setminus \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i^\varrho} \varkappa^\varrho(s) \, ds = \int_{\partial D} \varkappa(s) \, ds.$$

Kombination der Aussagen ergibt

$$\int_{\partial D} \varkappa \, ds + \sum_{i=1}^N \alpha_i = 2\pi. \tag{11.8}$$

Nun zum Riemannschen Fall. Durch Abschneiden sieht man, dass der Satz von Stokes auch auf einem Gebiet mit stückweise C^2-Rand stimmt. Mit $v = e_1/\sqrt{g_{11}}$ folgt wieder

$$\int_D K_g \, dA_g = -\int_{\partial D} \omega^v(\gamma') \, ds_g. \tag{11.9}$$

Sei $\gamma : [0, L] \to \partial D$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge von ∂D, so dass $J_g\gamma'$ die innere Normale ist. Die singulären Punkte seien

$$\gamma(s_i) = p_i \quad \text{für } 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = L.$$

Nach Satz 3.2 gilt auf jedem Intervall $[s_{i-1}, s_i]$

$$v \circ \gamma = \cos\theta\gamma' + \sin\theta J_g\gamma' \quad \text{mit } \theta \in C^1([s_{i-1}, s_i]) \text{ geeignet.}$$

In einer Ecke $s = s_i$ ist $v(\gamma(s))$ stetig, während die Basis γ', $J_g\gamma'$ um den Außenwinkel α_i dreht. Genauer berechnen wir

$$\begin{aligned} v(s_i) &= \cos\theta_-(s_i)\,\gamma_-'(s_i) + \sin\theta_-(s_i)\,J_g\,\gamma_-'(s_i) \\ &= \cos\theta_-(s_i)\big(\cos\alpha_i\,\gamma_+'(s_i) - \sin\alpha_i\,J_g\,\gamma_+'(s_i)\big) \\ &\quad + \sin\theta_-(s_i)\big(\sin\alpha_i\,\gamma_+'(s_i) + \cos\alpha_i\,J_g\,\gamma_+'(s_i)\big) \\ &= \big(\cos\theta_-(s_i)\,\cos\alpha_i + \sin\theta_-(s_i)\,\sin\alpha_i\big)\,\gamma_+'(s_i) \\ &\quad + \big(\sin\theta_-(s_i)\,\cos\alpha_i - \cos\theta_-(s_i)\,\sin\alpha_i\big)\,J_g\,\gamma_+'(s_i) \\ &= \cos\big(\theta_-(s_i) - \alpha_i\big)\,\gamma_+'(s_i) + \sin\big(\theta_-(s_i) - \alpha_i\big)\,J_g\,\gamma_+'(s_i). \end{aligned}$$

In s_i hat θ somit einen Sprung

$$\theta_-(s_i) - \theta_+(s_i) \in \alpha_i + 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{für } i = 0, \ldots, s_N.$$

Dabei wird $\theta_-(0) = \theta_-(L)$, $\theta_+(L) = \theta_+(0)$ gesetzt. Wir berechnen nun mit (11.2)

$$\int_0^L \big(\omega^v(\gamma') - \varkappa_g\big)\,ds_g = \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \theta'(s)\,ds = \sum_{i=1}^N \theta_-(s_i) - \theta_+(s_{i-1}) \in \sum_{i=1}^N \alpha_i + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Durch Kombination folgt

$$\int_D K_g\,dA_g + \int_{\partial D} \varkappa_g\,ds_g + \sum_{i=1}^N \alpha_i \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Jetzt deformiere wieder zur Euklidischen Metrik. Es ist klar, dass sich die Außenwinkel dabei stetig ändern. Der Satz folgt somit aus dem Umlaufsatz mit Ecken. □

Beispiel 11.2 Für die Innenwinkel in einem Dreieck mit $\varkappa_g \equiv 0$ gilt

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i = 3\pi - \sum_{i=1}^3 \alpha_i = \pi + \int_D K_g\,dA_g.$$

Die Summe der Innenwinkel ist also größer bzw. kleiner als im Euklidischen, je nachdem ob die totale Gaußsche Krümmung positiv bzw. negativ ist.

Zum Schluss kommen wir zu einer globalen Fassung des Satzes von Gauß-Bonnet.

Definition 11.5 (Triangulierung) *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte, kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂S, eventuell $\partial S = \emptyset$. Eine kompakte Menge $T \subset S$ heißt Dreieck in S, wenn $T = \phi(\Delta)$ für einen C^2-Diffeomorphismus $\phi : \Delta \to T$, wobei Δ ein Euklidisches Dreieck in $\mathbb{R}^2$ ist. Eine Triangulierung von S ist eine Familie $\mathcal{T} = \{T_\ell : \ell = 1, \ldots, f\}$ von Dreiecken, so dass gilt:*

(a) $\bigcup_{\ell=1}^{f} T_\ell = S$,

(b) *Für $\ell \neq \ell'$ ist $T_\ell \cap T_{\ell'}$ entweder leer, oder eine Ecke, oder eine Kante.*

Bezeichnet e die Anzahl aller Ecken, k die Anzahl aller Kanten und f die Anzahl aller Flächen der Triangulierung $\mathcal{T}$, so ist die Euler-Charakteristik (auch: Euler-Poincaré-Charakteristik) definiert durch

$$\chi(\mathcal{T}) = e - k + f.$$

Die Existenz einer Triangulierung für eine kompakte Fläche S wurde von T. Radó bewiesen (1925). In der Vorlesung *Einführung in die Differentialgeometrie* (2009) konstruiert B. Ammann eine Triangulierung für Flächen ohne Rand mit Standard-Techniken der Riemannschen Geometrie. Wir werden die Triangulierung ohne Beweis verwenden.

Satz 11.4 (Globaler Gauß-Bonnet) *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂S, eventuell $\partial S = \emptyset$. Es sei $\varkappa_g : \partial S \to \mathbb{R}$ die geodätische Krümmung bezüglich der inneren Konormalen ν auf ∂S. Dann gilt*

$$\int_S K\, dA_g + \int_{\partial S} \varkappa_g\, ds = 2\pi\chi(\mathcal{T}),$$

für jede Triangulierung $\mathcal{T}$ von S.

Bemerkung. Die Zahl $\chi(\mathcal{T})$ hängt demnach nicht von der Wahl der Triangulierung ab, wir können auch $\chi(S)$ schreiben. Man kann zeigen, dass $\chi(S)$ sogar eine topologische Invariante ist, das heißt homeomorphe Flächen haben die gleiche Eulercharakteristik. Im Fall $\partial S = \emptyset$ ist jede Fläche homeomorph zu einer Fläche S_g, die aus der Sphäre durch Einsetzen von $g \in \mathbb{N}_0$ Henkeln ensteht. Für diese gilt $\chi(S_g) = 2(1-g)$.

Beweis (des Satzes): Indem wir zu T_ℓ einen Diffeomorphismus $\phi_\ell : \Delta \to T_\ell$ wählen, erhalten wir auf Δ eine Riemannsche Metrik g_ℓ, und der lokale Satz von Gauß-Bonnet ergibt

$$\int_{T_\ell} K\, dA + \int_{\partial T_\ell} \varkappa_g\, ds = \sum_{\nu=1}^{3} \omega_{\ell,\nu} - \pi.$$

Dabei sind $\omega_{\ell,\nu} \in (0, 2\pi)$ die wohldefinierten Innenwinkel von T_ℓ. Bezeichne nun mit

$$\begin{aligned} e_i &= \#\{\text{innere Ecken}\},\\ e_r &= \#\{\text{Rand-Ecken}\},\\ k_i &= \#\{\text{innere Kanten}\},\\ k_r &= \#\{\text{Rand-Kanten}\}. \end{aligned}$$

Bei Summation über alle Dreiecke heben sich die Integrale von $\varkappa_g$ über die inneren Kanten paarweise weg, da die Normale entgegengesetzt gerichtet ist. Die

Innenwinkel addieren sich in einer inneren Ecke zu 2π, in einer Randecke nur zu π. Somit ergibt sich

$$\int_S K\,dA + \int_{\partial\Sigma} \varkappa_g\,ds = 2\pi e_i + \pi e_r - \pi f.$$

Es gelten nun folgende kombinatorischen Regeln:

- $3f = 2k_i + k_r$: zu jedem Dreieck gehören 3 Kanten, wobei die inneren Kanten in jeweils zwei Dreiecken liegen.
- $e_r = k_r$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e_i + \frac{1}{2}e_r - \frac{1}{2}f &= e_i + e_r + f - \left(\frac{3}{2}f + \frac{1}{2}e_r\right) \\ &= e + f - \big(k_i + \frac{1}{2}k_r + \frac{1}{2}k_r\big) \\ &= e + f - k. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

12 Anhang I: Existenz von Kürzesten

Hier betrachten wir nochmals die Bogenlänge für Kurven, und zwar etwas allgemeiner in einem metrischen Raum (M, d). Wir erklären, wie auch in dieser Situation rektifizierbare Kurven nach der Bogenlänge umparametrisiert werden können. Als Hauptresultat beweisen wir die Existenz von kürzesten Verbindungskurven in metrischen Räumen, deren Abstandskugeln kompakt sind.

Definition 12.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\gamma \in C^0(I, M)$ heißt stetige Kurve in M. Ist $I = [a, b]$ und gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ geschlossen.*

Sei $Z = (t_0, t_1, \ldots, t_N)$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$. Wir setzen

$$L_Z(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big).$$

In einem normierten Raum mit Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ ist $L_Z(\gamma)$ die Länge des einbeschriebenen Polygonzugs.

Definition 12.2 *Die Länge einer Kurve $\gamma \in C^0(I, M)$ auf einem Intervall $I = [a, b]$ ist*

$$L(\gamma) := \sup_Z L_Z(\gamma) \in [0, \infty].$$

γ heißt rektifizierbar, falls $L(\gamma) < \infty$.

Aus der Definition der Bogenlänge folgt die Abschätzung

$$d\big(\gamma(t_1),\gamma(t_2)\big) \leq L\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big). \tag{12.1}$$

Ist $\gamma : [a,b] \to M$ Lipschitzstetig mit Konstante $L < \infty$, so gilt andererseits

$$L(\gamma) \leq L\,(b-a), \tag{12.2}$$

denn für jede Zerlegung Z gilt die Abschätzung

$$L_Z(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} d\big(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})\big) \leq L \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}| = L\,(b-a).$$

Lemma 12.1 *Für $\tau \in I = [a,b]$ und $\gamma \in C^0(I,M)$ gilt*

$$L(\gamma) = L\big(\gamma|_{[a,\tau]}\big) + L\big(\gamma|_{[\tau,b]}\big). \tag{12.3}$$

Beweis: Setze $I_1 = [a,\tau]$ und $I_2 = [\tau,b]$. Sind $Z_{1,2}$ beliebige Zerlegungen von $I_{1,2}$, so ist $Z = (Z_1,Z_2)$ Zerlegung von I und es folgt

$$L_{Z_1}(\gamma|_{I_1}) + L_{Z_2}(\gamma|_{I_2}) = L_Z(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Bildung des Supremums über alle $Z_{1,2}$ ergibt

$$L(\gamma|_{I_1}) + L(\gamma|_{I_2}) \leq L(\gamma).$$

Sei umgekehrt $Z = (t_0,\ldots,t_N)$ eine Zerlegung von I. Dann gibt es ein $r \in \{1,\ldots,N\}$ mit $\tau \in [t_{r-1},t_r]$. Definiere die Zerlegungen $Z_1 = (t_0,\ldots,t_{r-1},\tau)$ von I_1 und $Z_2 = (\tau,t_r,\ldots,t_N)$ von I_2. Es folgt wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
L_Z(\gamma) &= \sum_{i=1}^{N} d\big(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})\big)\\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1} d\big(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})\big) + d\big(\gamma(\tau),\gamma(t_{r-1})\big)\\
&\quad + d\big(\gamma(t_r),\gamma(\tau)\big) + \sum_{i=r+1}^{N} d\big(\gamma(t_i),\gamma(t_{i-1})\big)\\
&\leq L(\gamma|_{I_1}) + L(\gamma|_{I_2}).
\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle Z liefert $L(\gamma) \leq L(\gamma|_{I_1}) + L(\gamma|_{I_2})$. $\square$

Lemma 12.2 *Sei $\gamma \in C^0(I,M)$. Dann gibt es zu jedem $L < L(\gamma)$ ein $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung Z mit Feinheit $\Delta(Z) < \delta$ gilt:*

$$L < L_Z(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Beweis: Die rechte Ungleichung gilt nach Definition von $L(\gamma)$. Wähle zu $L < L(\gamma)$ eine Zerlegung $Z_0 = (s_0, \ldots, s_M)$ mit $L_{Z_0}(\gamma) > L$. Zu $\varepsilon \in (0, L_{Z_0}(\gamma) - L)$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{für } |t - t'| < \delta.$$

Sei nun $Z = (t_0, \ldots, t_N)$ eine beliebige Zerlegung mit $\Delta(Z) < \delta$. Die gemeinsame Verfeinerung $Z \cup Z_0$ ergibt sich durch Vereinigung und Anordnung der Unterteilungspunkte von Z, Z_0. Sei m_j die Zahl der Punkte s_i im offenen Intervall (t_{j-1}, t_j), für $1 \leq j \leq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L + \varepsilon &< L_{Z_0}(\gamma) \\ &\leq L_{Z \cup Z_0}(\gamma) \\ &\leq \sum_{j=1}^N d\big(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})\big) + \sum_{j : m_j > 0} (m_j + 1)\, \frac{\varepsilon}{2M} \\ &\leq L_Z(\gamma) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 12.3 *Ist $\gamma \in C^0(I, M)$ rektifizierbar, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes Intervall $J \subset I$ mit Länge $L(J) < \delta$ gilt:*

$$L(\gamma|_J) < \varepsilon.$$

Beweis: Nach Lemma 12.2 gibt es ein $\delta > 0$, so dass $L(\gamma) - L_Z(\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$ für jede Zerlegung Z mit $\Delta(Z) < \delta$. Wir können außerdem annehmen, dass $d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|t - t'| < \delta$. Zu gegebenem Intervall J bestimmen wir eine Zerlegung Z mit $\Delta(Z) < \delta$, für die J eines der Teilintervalle ist. Dann folgt für jede Zerlegung Z' von $J = [\alpha, \beta]$

$$L_{Z'}(\gamma|_J) = L_{Z \cup Z'}(\gamma) - L_Z(\gamma) + d\big(\gamma(\beta), \gamma(\alpha)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Definition 12.3 *$\gamma \in C^0(I, M)$ heißt längentreu oder nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn*

$$L\big(\gamma|_{[s_1, s_2]}\big) = |s_1 - s_2| \quad \textit{für alle } s_1, s_2 \in I.$$

Mit der Abschätzung (12.1) folgt:

$$\gamma \text{ längentreu} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Lip}\,(\gamma) \leq 1. \tag{12.4}$$

Wir definieren nun für eine beliebige, rektifizierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ eine längentreue Umparametrisierung $\tilde{\gamma}$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$\ell_\gamma : [a, b] \to [0, L(\gamma)],\ \ell_\gamma(t) = L\big(\gamma|_{[a,t]}\big). \tag{12.5}$$

Aus Lemma 12.1 und Lemma 12.3 folgt, dass die Funktion $\ell_\gamma(t)$ monoton wachsend (im schwachen Sinn), stetig und surjektiv ist. Wir setzen

$$\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to M,\ \tilde{\gamma}(s) := \gamma(t) \quad \text{für } t \in \ell_\gamma^{-1}\{s\}. \tag{12.6}$$

Satz 12.1 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Die Kurve $\tilde{\gamma}$ in (12.6) ist wohldefiniert und nach der Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis: Für $\ell_\gamma(t_{1,2}) = s_{1,2}$ gilt nach (12.1) und Lemma 12.1

$$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) \leq L\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) = |\ell_\gamma(t_1) - \ell_\gamma(t_2)| = |s_1 - s_2|. \tag{12.7}$$

Also ist γ konstant auf dem Intervall $\ell_\gamma^{-1}\{s\}$, und somit $\tilde{\gamma}$ wohldefiniert. Außerdem ist $\tilde{\gamma}$ Lipschitzstetig mit $\operatorname{Lip}(\tilde{\gamma}) \leq 1$, insbesondere rektifizierbar. Seien nun $s_{1,2} \in [0, L(\gamma)]$ gegeben. Wähle $t_{1,2} \in [a,b]$ mit $\ell_\gamma(t_{1,2}) = s_{1,2}$, und betrachte eine Folge Z_j von Zerlegungen von $[t_1, t_2]$ mit $\Delta(Z_j) \to 0$. Nach Lemma 12.3 folgt $\Delta(\ell_\gamma(Z_j)) \to 0$, und Lemma 12.2 liefert

$$L\big(\tilde{\gamma}|_{[s_1,s_2]}\big) = \lim_{j\to\infty} L_{\ell_\gamma(Z_j)}\big(\tilde{\gamma}|_{[s_1,s_2]}\big) = \lim_{j\to\infty} L_{Z_j}\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) = L\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) = |s_1 - s_2|.$$

$\square$

Oft ist man an der Existenz von Kürzesten in Homotopieklassen interessiert, und deshalb wollen wir die Parametrisierung nach der Bogenlänge kurz aus diesem Gesichtspunkt betrachten. Wir nehmen $[a,b] = [0,L]$ mit $L = L(\gamma)$ an, andernfalls gehen wir über zu

$$\gamma_L : [0,L] \to M,\ \gamma_L(s) = \gamma\left(a + \frac{s}{L}(b-a)\right).$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\lambda : [0,L] \times [0,1] \to [0,L],\ \lambda(t,u) = (1-u)\,t + u\,\ell_\gamma(t),$$

und definieren weiter

$$h : [0,L] \times [0,1] \to M,\ h(s,u) = \gamma(t) \quad \text{falls } \lambda(t,u) = s.$$

Es ist leicht zu sehen, dass h wohldefiniert ist und folgende Funktionswerte besitzt:

$$\begin{aligned} h(\cdot,0) &= \gamma \quad \text{und} \quad h(\cdot,1) = \tilde{\gamma}, \\ h(0,\cdot) &\equiv \gamma(0) \quad \text{und} \quad h(L,\cdot) \equiv \gamma(L). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass h stetig ist, betrachte eine Folge $(s_k, u_k) \to (s,u)$. Da $\lambda(\cdot, u_k)$ surjektiv, gibt es ein $t_k \in [0,L]$ mit $\lambda(t_k, u_k) = s_k$, also nach Definition $h(s_k, u_k) = \gamma(t_k)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $t_k \to t \in [0,L]$, also $\lambda(t,u) = s$ durch Grenzübergang und

$$h(s,u) = \gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \gamma(t_k) = \lim_{k\to\infty} h(s_k, u_k).$$

Das übliche Teilfolgenargument impliziert die Stetigkeit. Also gilt:

Lemma 12.4 *Enthält eine Homotopieklasse von Kurven in M eine rektifizierbare Kurve, so enthält sie auch eine längentreue Kurve.*

Satz 12.2 (Unterhalbstetigkeit der Länge) *Konvergieren die Kurven $\gamma_k \in C^0(I, M)$ punktweise gegen $\gamma \in C^0(I, M)$, so gilt*

$$L(\gamma) \leq \liminf_{k \to \infty} L(\gamma_k).$$

BEWEIS: Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt

$$L_Z(\gamma) = \lim_{k \to \infty} L_Z(\gamma_k) \leq \liminf_{k \to \infty} L(\gamma_k).$$

Durch Bilden des Supremums über Z folgt die Behauptung. □

Für den nachfolgenden Satz verweisen wir auf [**?**]. Statt eines Intervalls $I = [a, b]$ kann man einen beliebigen kompakten metrischen Raum zulassen, aber das wird hier nicht gebraucht.

Satz 12.3 (Arzela-Ascoli) *Sei (M, d) metrischer Raum, $I = [a, b]$ und $\gamma_k \in C^0(I, M)$ habe folgende Eigenschaften:*

(1) *Die Folge γ_k ist gleichgradig stetig.*

(2) *Für jedes $t \in I$ hat die Folge $\gamma_k(t) \in M$ eine konvergente Teilfolge.*

Dann konvergiert eine Teilfolge γ_{k_j} gleichmäßig gegen ein $\gamma \in C^0(I, M)$.

Damit kommen wir zum Hauptresultat des Abschnitts.

Satz 12.4 (Hilbert) *Sei (M, d) ein metrischer Raum, in dem abgeschlossene Abstandskugeln kompakt sind. Sind $p, q \in M$ und gibt es einen rektifizierbaren Weg von p nach q in M, so gibt es auch einen kürzesten Weg von p nach q in M.*

BEWEIS: Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kurven von p nach q, und $L = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} L(\gamma)$. Ohne Einschränkung sei $p \neq q$, also $L \geq d(p, q) > 0$. Wähle $\gamma_k \in \mathcal{C}$ mit $L_k := L(\gamma_k) \to L$. Nach Satz 12.1 können wir annehmen, dass die γ_k längentreu sind. Um zu einem festen Intervall als Definitionsbereich zu kommen, gehen wir noch über zu

$$\tilde{\gamma}_k : [0, L] \to M,\ \tilde{\gamma}_k(s) = \gamma_k\left(\frac{L_k}{L} s\right).$$

Die $\tilde{\gamma}_k$ sind Lipschitzstetig mit Konstante $L_k/L \to 1$, also gleichgradig stetig. Außerdem gilt

$$d(\tilde{\gamma}_k(s), p) = d(\tilde{\gamma}_k(s), \tilde{\gamma}_k(0)) \leq L(\tilde{\gamma}_k|_{[0,s]}) \leq L_k \to L.$$

Nach Voraussetzung hat $\gamma_k(s)$, für jedes $s \in [0, L]$, eine konvergente Teilfolge. Der Satz von Arzela-Ascoli liefert nun ein $\gamma \in C^0([0, L], M)$ mit $\tilde{\gamma}_k \to \gamma$ gleichmäßig für $k \to \infty$. Es folgt $\gamma \in \mathcal{C}$ und nach Satz 12.2

$$L(\gamma) \leq \liminf_{k \to \infty} L(\tilde{\gamma}_k) = L.$$

Damit ist der Existenzsatz bewiesen. □

Allgemeiner liefert das gegebene Argument die Existenz von Kürzesten in jeder Klasse $\mathcal{C}$ von Kurven, die folgende Eigenschaften hat:

(a) Es gibt rektifizierbare Kurven in $\mathcal{C}$.

(b) $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen unter gleichmäßiger Konvergenz.

(c) Es gibt ein Kompaktum $K \subset M$ mit $\gamma(I) \cap K \neq \emptyset$ für alle $\gamma \in \mathcal{C}$.

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn $\mathcal{C}$ eine Homotopieklasse von Verbindungskurven von p nach q in einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ oder einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist. Für freie Homtopieklassen gilt Entsprechendes, wenn zum Beispiel M zusätzlich kompakt ist.