"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2016 — Übungsblatt 1

Ausgabe: 21.04.2016, **Abgabe:** 29.04.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Ein angeordneter Ring $(R, \geq)$ ist ein Ring R mit Totalordnung $\geq$ sodass für $a, b, c \in R$ aus $a \geq b$ stets $a + c \geq b + c$ und für $c \geq 0$ auch $ac \geq bc$ folgt. Zeigen Sie, dass sich der Ring $\mathbb{Z}[i]$ nicht anordnen lässt.

(2 Punkte)

Aufgabe 1.2: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ Hauptidealring, faktoriell und euklidisch ist. Bestimmen Sie Einheiten und Primelemente.

(5 Punkte)

Aufgabe 1.3: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \equiv 1 \mod (4)$ nicht prim in $\mathbb{Z}[i]$ ist und dass es daher eine Darstellung $p = a^2 + b^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt.
Wie findet man daraus eine explizite Darstellung $p = a^2 + b^2$?
Tipp: Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$ eine Lösung von $x^2 + 1 = 0$ modulo p. Betrachten Sie die Ideale $(p, \alpha + i)$, $(p, \alpha - i)$.

(5 Punkte)