"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2016 — Übungsblatt 4

Ausgabe: 16.05.2016, **Abgabe:** 27.05.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Beweisen Sie: Ein Dedekindring R ist faktoriell genau dann, wenn er ein Hauptidealring ist.
Erinnerung: Sie wissen bereits, dass Hauptidealringe faktoriell sind.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.2: Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \leq A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die Abbildung $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ eine Bijektion induziert:

$$\left\{ \text{Ideale } \mathfrak{b} \leq A \;\middle|\; \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \right\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Ideale } \mathfrak{c} \leq A/\mathfrak{a}\}.$$

Zeigen Sie auch, dass die Einschränkung auf Primideale (resp. maximale Ideale) auf beiden Seiten ebenfalls eine Bijektion ergibt.

(2 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring und $\mathfrak{a} \leq \mathcal{O}$ ein von 0 verschiedenes Ideal in $\mathcal{O}$. Zeigen Sie: Der Quotientenring $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ ist ein Hauptidealring.
Tipps:

- Beachten Sie: der Quotientenring $\mathcal{O}/\mathfrak{a}$ ist nicht notwendig nullteilerfrei, z.B. $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ mit $\mathfrak{a} = (4)$.
- Betrachten Sie zunächst die Fälle $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ Primideal und $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^n$.
- Zeigen Sie: die nichttrivialen Ideale von $\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$ sind $\mathfrak{p}^k/\mathfrak{p}^n$ für $k = 1, \ldots, n-1$.
- Wählen Sie $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ und zeigen Sie $\mathfrak{p}^k = (\pi^k) + \mathfrak{p}^n$ für $k = 1, \ldots, n-1$.
- Für allgemeines $\mathfrak{a}$, erinnern Sie sich an den Chinesischen Restsatz, verwenden Sie eindeutige Primidealzerlegung für $\mathfrak{a}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.4: Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring. Zeigen Sie dass es für jedes Ideal $\mathfrak{a} \leq \mathcal{O}$ zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{a}$ gibt, die $\mathfrak{a}$ erzeugen, d.h. $\mathfrak{a} = (x, y)$.
Tipp: Sie dürfen das Ergebnis der vorherigen Aufgabe verwenden.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.5: Sei $\mathcal{O}$ ein noetherscher Integritätsbereich, in dem alle von 0 verschiedenen Ideale eine eindeutige Zerlegung in Primideale haben. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ ein Dedekindring ist. Achtung: schwere Aufgabe.

(4 Punkte)