“Algebraische Zahlentheorie”
SS 2016 — Übungsblatt 6

Ausgabe: 02.06.2016, **Abgabe:** 10.06.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Bonus-Aufgabe 6.1: Sei K ein quadratischer Zahlkörper, also $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit d quadratfrei. Sei D die Diskriminante von K. Zeigen Sie: Ist $d \equiv 1 \mod (4)$, so ist $D = d$, ansonsten $D = 4d$. In jedem Falle ist $\left\{1, \frac{1}{2}\left(D + \sqrt{D}\right)\right\}$ eine Ganzheitsbasis.

(1 Punkt)

Aufgabe 6.2: Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante D. Zeigen Sie: Ist $D = 5$ oder $D = -7$, so hat K die Klassenzahl 1 (d.h. es gibt stets eine eindeutige Zerlegung in Primelemente, $\mathcal{O}_K$ ist ein Hauptidealring).

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3: Berechnen Sie die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Sie dürfen dabei verwenden, dass $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ eine Ganzheitsbasis ist, was auf einem früheren Übungsblatt zu zeigen war.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.4: Sei K ein Zahlkörper, $\rho_1, \ldots, \rho_r \colon K \to \mathbb{R}$ die reellen und $\tau_1, \ldots, \tau_s, \overline{\tau_1}, \ldots, \overline{\tau_s} \colon K \to \mathbb{C}$ die komplexen Einbettungen, $n := r + 2s$ (der Grad von K über $\mathbb{Q}$). Betrachten Sie die durch komplexe Konjugation auf dem zweiten Faktor von $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ induzierte Abbildung

$$F \colon K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},\ \alpha \otimes \lambda \mapsto \alpha \otimes \overline{\lambda}.$$

Zeigen Sie: Unter der Identifikation

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n,\ \alpha \otimes 1 \mapsto \left(\rho_1(\alpha), \ldots, \rho_r(\alpha), \tau_1(\alpha), \ldots, \tau_s(\alpha), \overline{\tau_1(\alpha)}, \ldots, \overline{\tau_s(\alpha)}\right)$$

gilt $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^F \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{C}^s$ wobei $\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{C}^s \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ via

$$(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_s}).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 6.5: Die Einschränkung des hermiteschen Skalarprodukts von $\mathbb{C}^n$ auf den Unterraum $\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{C}^s$ (aus der vorherigen Aufgabe) hat die Form

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_s' \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} x_i x_i' + \sum_{j=1}^{s} 2\Re\left(y_i \overline{y_i'}\right).$$

Für Zahlen $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ berechnen Sie das Volumen der unten angegebenen Menge $X \subset \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{C}^s$ bezüglich des durch dieses Skalarprodukt induzierten Volumenbegriffs auf $\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{C}^s$:

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} |x_i| < c_i, \\ |y_i| < d_i \end{matrix} \right\}$$

(2 Punkte)