“Algebraische Zahlentheorie”
SS 2016 — Übungsblatt 7

Ausgabe: 09.06.2016, **Abgabe:** 17.06.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Bestimmen Sie die Klassengruppe von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Beweisen Sie, dass die Diskriminante d_K von K den Wert -56 hat.
2. Zeigen Sie, dass es keine reellen Einbettungen von K gibt und begründen Sie, warum die Anzahl der Paare komplexer Einbettungen genau 1 ist.
3. Bestimmen Sie die “Minkowski-Schranke” $\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sqrt{|d_K|}$ auf 3 Dezimalstellen genau. Sie ist kleiner als 5.
4. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f(X)$ von $\sqrt{-14}$ über $\mathbb{Q}$.
5. Faktorisieren Sie $f(X)$ modulo p für alle Primzahlen $p < 5$.
6. Bestimmen Sie die Primidealfaktorisierung von (2) und (3) in $\mathcal{O}_K$.
7. Geben Sie eine Menge von Erzeugern der Klassengruppe von $\mathcal{O}_K$ an. Begründen Sie, warum diese die Klassengruppe erzeugen. Geben Sie an dieser Stelle bereits eine obere Abschätzung an die Klassenzahl an.
8. Um Relationen zwischen den Erzeugern zu finden, suchen Sie ein Ideal von $\mathcal{O}_K$ (z.B. ein Hauptideal) mit geeigneter Norm, z.B. hat $2 + \sqrt{-14}$ Norm $18 = 2 \cdot 3^2$, wird aber nicht von 3 geteilt.
9. Beweisen Sie schließlich: Die Klassengruppe von $\mathcal{O}_K$ ist eine zyklische Gruppe von Ordnung 4, erzeugt durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ sodass $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{p}^3$ keine Hauptideale sind, hingegen $\mathfrak{p}^4$ ein Hauptideal ist.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.2: Bestimmen Sie die Klassengruppe von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-65})$.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.3: Sei K ein Zahlkörper. Zeigen Sie, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ über einem Hauptideal von $\mathbb{Z}$ liegt, d.h. dass es ein $a \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a\mathcal{O}_K \subseteq \mathfrak{a}$. Betrachten Sie dazu $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es für jedes Primideal $\mathfrak{p} \leq \mathcal{O}_K$ eine eindeutige Primzahl p gibt, sodass $p\mathcal{O}_K \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Beschreiben Sie, wie die Normen $N(a)$ und $N(\mathfrak{a})$ zusammenhängen.

(2 Punkte)

Aufgabe 7.4: Die Schlacht von Hastings, 1066
(siehe auch S. 46, Aufgabe 3 in Neukirchs "Algebraische Zahlentheorie").

Harolds Mannen standen nach alter Gewohnheit dichtgedrängt in 13 gleichgroßen Quadraten aufgestellt, und wehe dem Normannen, der es wagte, in eine solche Phalanx einbrechen zu wollen. ... Als aber Harold selbst auf dem Schlachtfeld erschien, formten die Sachsen ein einziges gewaltiges Quadrat mit ihrem König an der Spitze und stürmten mit den Schlachtrufen "Ut!", "Olicrosse!", "Godemite!" vorwärts ...

Wie groß soll die Armee Harolds II. gewesen sein?

Tipp: Suchen sie Lösungen von $13x^2 - y^2 = \pm 1$, entweder durch probieren oder mittels Kettenbrüchen (wie in einer der ersten Vorlesungen erklärt).

(4 Punkte)

Aufgabe 7.5: Gegeben eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \to A \to G \to H \to 0$$

(also $A \hookrightarrow G$ ein Monomorphismus, $G \twoheadrightarrow H$ ein Epimorphismus und $\mathrm{Bild}(A \to G) = \mathrm{Ker}(G \to H)$), zeigen Sie: ist H eine freie abelsche Gruppe und A eine endliche abelsche Gruppe, so ist G isomorph zu $A \times H$ sodass die komponierten Abbildungen $A \to G \xrightarrow{\sim} A \times H$ und $A \times H \xrightarrow{\sim} G \to H$ gegeben sind durch $a \mapsto (a, 1)$ bzw. $(a, h) \mapsto h$. In dieser Situation sagt man auch dass die Sequenz *spaltet*.

(2 Punkte)

Spaltet die Sequenz auch ohne die Voraussetzung an die Endlichkeit von A?

(0 Punkte)