"Algebraische Zahlentheorie"
SS 2016 — Übungsblatt 8

Ausgabe: 16.06.2016, **Abgabe:** 24.06.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss16/algzt.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Sei K ein total reeller Zahlkörper, also $X := \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(K, \mathbb{R})$, und $\emptyset \neq T \subset X$ eine echte nichtleere Teilmenge von reellen Einbettungen. Zeigen Sie: Es gibt eine Einheit $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times$ mit $0 < \tau(\varepsilon) < 1$ für alle $\tau \in T$ sowie $\tau(\varepsilon) > 1$ für alle $\tau \in X \setminus T$.
Tipp: Betrachten Sie das Einheitengitter im Spur-Null-Raum, verwenden Sie den Minkowskischen Gitterpunktsatz.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Sei p eine ungerade Primzahl und ζ eine primitive p-te Einheitswurzel (d.h. $\zeta^k = 1$ gdw. $k = p^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

1. Zeigen Sie
$$\mathbb{Z}[\zeta]^\times = (\zeta)\mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}]^\times.$$
2. Zeigen Sie, dass für $p = 5$ weiterhin gilt
$$\mathbb{Z}[\zeta]^\times = \left\{ \pm\zeta^k (1+\zeta)^n \;\middle|\; 0 \leq k < 5, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 8.3: Sei K ein Zahlkörper und L/K sowie L'/K endliche algebraische Erweiterungen (also ebenfalls Zahlkörper, insb. sind die Erweiterungen separabel). Zeigen Sie: Ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_K$ sowohl in L als auch in L' (genauer: in $\mathcal{O}_L$ und $\mathcal{O}_{L'}$) vollständig zerlegt (also zerlegt in Primideale mit Trägheitsgraden und Verzweigungsindices jeweils 1), so auch im Kompositum L''/K (dem kleinsten gemeinsamen Oberkörper) von L/K und L'/K.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.4: Seien $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\right)$ und $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}, i\right)$. Zeigen Sie, dass L/K über allen Primidealen von K unverzweigt ist, d.h. für $\mathfrak{p} \leq \mathcal{O}_K$ treten in der Faktorisierung von $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ nur Primfaktoren von Multiplizität 1 auf.
Tipp: Betrachten Sie auch $L/\mathbb{Q}$ und den Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

(6 Punkte)