“Lineare Algebra”
WS 2018/19 — Übungsblatt 2

Ausgabe: 07.05.2019, **Abgabe:** 14.05.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Seien V und W endlich-dimensionale euklidische/unitäre Vektorräume, und sei $f\colon V \to W$ eine orthogonale/unitäre Abbildung. Zeigen Sie: Es gibt Orthonormalbasen $v_1, \dots, v_m$ von V, und $w_1, \dots w_n$ von W, sodass die darstellende Matrix von f gerade die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ist. **(4P)**

Aufgabe 2.2: Finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$ **(4P)**

Aufgabe 2.3: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Sei $U^\perp$ das orthogonale Komplement, sodass $V = U \oplus U^\perp$. Sei $p\colon V \to U$ die Projektion.

1. Zeigen Sie für alle $v \in V$ und $x \in U$, dass $||v - p(v)|| \leq ||v - x||$.
2. Sei $f\colon V \to V$ ein lineare Abbildung mit
   (a) $f(v) \in U$, für alle $v \in V$;
   (b) $||v - f(v)|| \leq ||v - x||$, für alle $v \in V$, $x \in u$.

   Zeigen Sie: $f = p$. (D.h. p ist eindeutig festgelegt durch diese zwei Bedingungen.) **(6P)**

(bitte wenden)

Aufgabe 2.4: Geben Sie ein Beispiel für einen euklidischen Vektorraum V und einen orthogonalen Endomorphismus $f\colon V \to V$, der nicht surjektiv ist. **(2P)**