“Lineare Algebra II”
SS 2019 — Übungsblatt 11

Ausgabe: 16.07.2019, **Abgabe:** 23.07.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss19/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Bonus-Aufgabe 11.1: Sei $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ein Matrix, so dass $M^3 = M$ gilt. Zeigen Sie, dass M diagonalisierbar ist. (Hinweis: Kapittel 12)

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.2: Sei $x \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie die Matrix

$$M_x = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Berechnen Sie die Signatur von M_1 und M_{-1}.
2. Für welche x ist M_x positiv definit?
3. Für welche x ist
$$\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$
positiv definit?

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.3: Sei $K \subset L$ ein Körpererweiterung und sei V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} L \times L \otimes_K V &\to L \otimes_K V \\ (\lambda, \mu \otimes v) &\mapsto \lambda\mu \otimes v \end{aligned}$$

eine natürliche L-Vektorraumstruktur auf $L \otimes_K V$ ist.
Natürlich heißt: für jede K-lineare Abbildung $f \colon V \to W$ erhalten wir eine L-lineare Abbildung $L \otimes_K V \to L \otimes_K W$, die sich verträgt mit Verknüpfung und Identitätsabbildungen.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 11.4: Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\sigma\colon V \otimes V \to V \otimes V$ die Transposition $v \otimes w \mapsto w \otimes v$. Bemerkung: $\sigma^2 = 1$.

1. Bestimmen Sie die Eigenräumen von σ.

2. Geben Sie einen natürlichen Isomorphismus

$$V \otimes V \cong S^2(V) \oplus \bigwedge^2 V.$$

(4 Punkte)