Sei k ein Körper.

Aufgabe 1.1. Sei (X, G) eine Inzidenzgeometrie, die einen Dreieck enthält. Zwei Geraden heißen in dieser Aufgabe *parallel*, wenn sie disjunkt sind. Wir betrachten *Playfairs Axiom*: Für jeden Punkt $x \in X$ und jede Gerade $g \in G$ gibt es höchstens eine Gerade $g' \in G$, die entweder parallel oder gleich zu g ist und x enthält. Für $g, g' \in G$ definieren wir weiter $g \sim g'$ genau dann, wenn g und g' parallel oder gleich sind. Zeigen Sie, dass $\sim$ genau dann eine Äquivalenzrelation auf G ist, wenn Playfairs Axiom erfüllt wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2. Sei (X, G) eine Inzidenzgeometrie mit X eine endliche Menge. Wenn es ein Dreieck in dieser Inzidenzgeometrie gibt, dann gilt

(a) $|G| \leq |X|(|X| - 1)$,

(2 Punkte)

(b) und $|X| \leq |G|$.

(4 Bonuspunkte)

Aufgabe 1.3. Sei W ein Vektorraum über k, $A \subseteq W$ ein affiner Teilraum zum Untervektorraum $V \subseteq W$, und $x, y, z \in A$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Richtungsvektoren:

(a) $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$,

(b) $\overrightarrow{xx} = 0$,

(c) $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$,

(d) $x + \overrightarrow{xy} = y$.

(2 Punkte)

Aufgabe 1.4 (Dimensionformel für affine Teilräume)**.** Seien W ein Vektorraum über k und $A, B \subseteq W$ zwei affine Teilräume. Wir bezeichnen mit $A + B \subseteq W$ den von A und B aufgespannten affinen Teilraum, also den kleinsten affinen Teilraum, der sowohl A als auch B enthält.

(a) Es sei $A \cap B \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass $A \cap B \subseteq W$ ein affiner Teilraum ist.

(Bitte wenden)

(b) Es sei $A \cap B \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

(c) Es seien A und B nun zwei windschiefe Geraden (also $A \cap B = \varnothing$ und $A \nparallel B$) im dreidimensionalen Vektorraum k^3. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\dim(A + B) = 3 \neq \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

(6 Punkte)

(d) Wir betrachten wieder den allgemeinen Fall. Also $\dim(W)$, $\dim(A)$ und $\dim(B)$ beliebig. Es bezeichnen $V \subseteq W$ bzw. $U \subseteq W$ die Räume der Richtungsvektoren von A bzw. B. Zeigen Sie, dass im Fall $A \cap B = \varnothing$ gilt:

$$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(V \cap U) + 1.$$

(3 Bonuspunkte)

Aufgabe 1.5 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** In Aufgabe 1.3 auf diesem Übungsblatt haben Sie die Rechenregeln für Richtungsvektoren bewiesen. In dieser Aufgabe geht es nun um die Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern mit dem Vektorbegriff, insbesondere um Fehlvorstellungen zu Richtungsvektoren.

1. Lesen Sie den Text von Günther Malle (2005) 'Schwierigkeiten mit Vektoren' und beschreiben Sie, welche Schwierigkeiten im Umgang mit dem Vektorbegriff bei Schülerinnen und Schülern beobachtet wurden und welche Gründe dafür genannt werden. Sie finden den Text als pdf-Datei zu Blatt 1 auf Ilias.

2. In dem Text ist von 'Pfeilklassen' die Rede. Charakterisieren Sie den Begriff der 'Pfeilklasse' mit Hilfe einer passenden Äquivalenzrelation.

Die Texte in dieser Aufgabe sind auf ILIAS verfügbar.

(3 Bonuspunkte)