Aufgabe 6.1. Seien $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir $(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$. Sei $f \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation und seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei verschiedene komplexe Zahlen. Dann ist $(z, z_1, z_2, z_3) = (f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3))$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.2. Wir betrachten eine allgemeine Möbiustransformation

$$\phi \colon \begin{cases} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \to & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ x & \mapsto & \frac{ax+b}{cx+d} \end{cases}$$

wobei $ad - bc \neq 0$.

(a) Berechnen Sie die Fixpunkte (aus $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) von ϕ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

(b) Geben Sie die Fixpunkte der 'elementaren' Möbiustransformationen der Form $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto \alpha x$, $x \mapsto x + \beta$ an.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3. Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei verschiedene komplexe Zahlen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Es seien $f, g \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ zwei Möbiustransformationen, so dass $f(z_i) = g(z_i)$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann ist $f = g$.

(b) Es gibt eine Möbiustransformation $f \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, so dass $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ und $f(z_3) = \infty$.

(c) Für jede drei verschiedene komplexe Zahlen $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ gibt es eine einzige Möbiustransformation $f \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, so dass $f(z_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.4. Sei $u \in \mathbb{C}$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $u\overline{u} - ab > 0$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung

$$az\overline{z} + u\overline{z} + \overline{u}z + b = 0$$

für $z \in \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von u, a, b entweder ein Kreis oder eine Gerade ist. Geben Sie Mittelpunkt und Radius bzw. eine Geradengleichung in der 'üblichen' Form (mit reellen Kordinaten) an.

(4 Punkte)

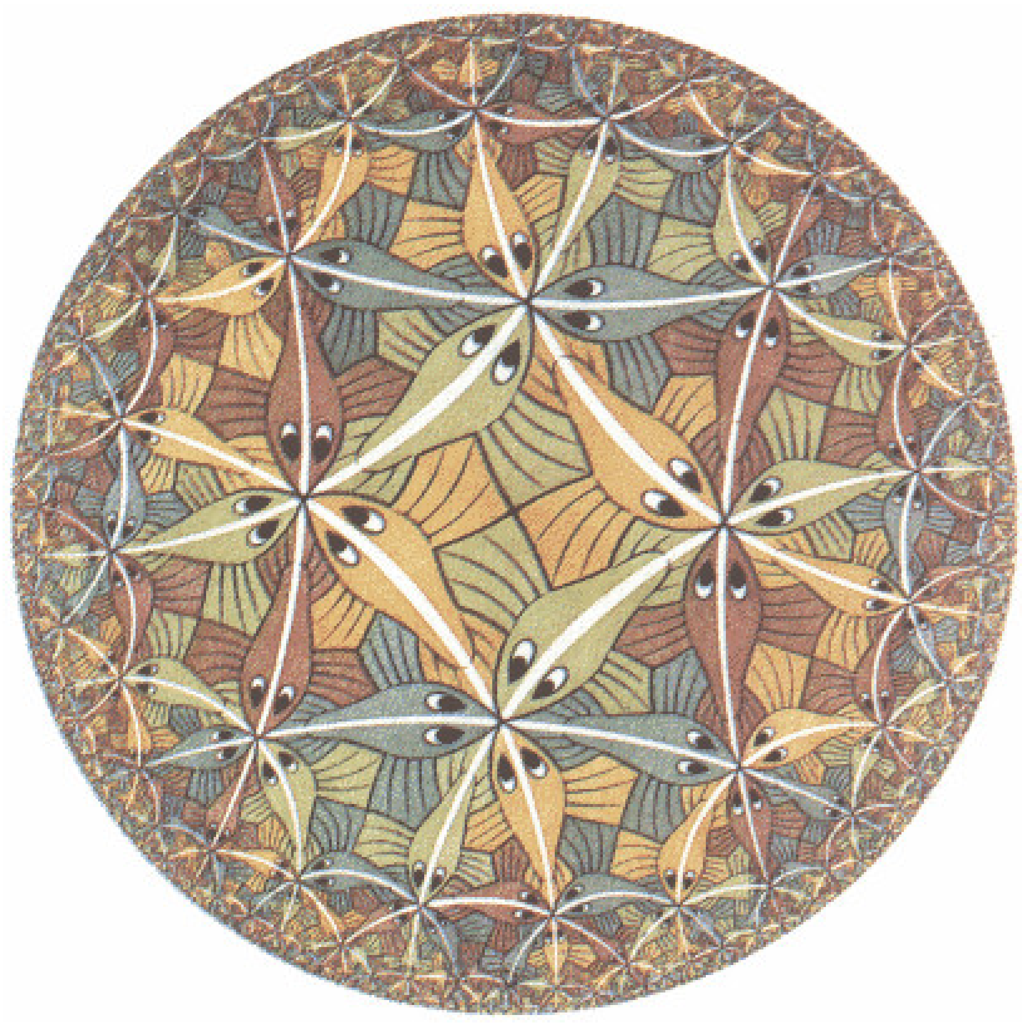
(Bitte wenden)

Bonusaufgabe 6.5. Betrachten Sie die Möbiustransformationen $\phi\colon z \mapsto -\frac{1}{z}$ und $\psi\colon z \mapsto z+1$ sowie die drei hyperbolischen Geraden gegeben durch

$$g_1 := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\}, \quad g_2 := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\}, \quad g_3 := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = 1\}.$$

Berechnen Sie die Bilder der Geraden unter ϕ, ψ, ψ^{-1}, $\phi \circ \psi$, sowie $\phi \circ \psi^{-1}$. Zeichnen Sie das Muster, was sich aus den Geraden durch Verkettungen von ϕ, ψ und ψ^{-1} ergibt.

Bemerkung: Sie erhalten so eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene durch Dreiecke - nämlich jene, deren Seiten durch die Geraden g_1, g_2, g_3 und deren Bilder beschrieben werden. Im Bild unten sehen Sie eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene im Kreisscheibenmodell durch Drei- und Vierecke (M. C. Escher, Kreislimit III, 1959).



(4 Bonuspunkte)

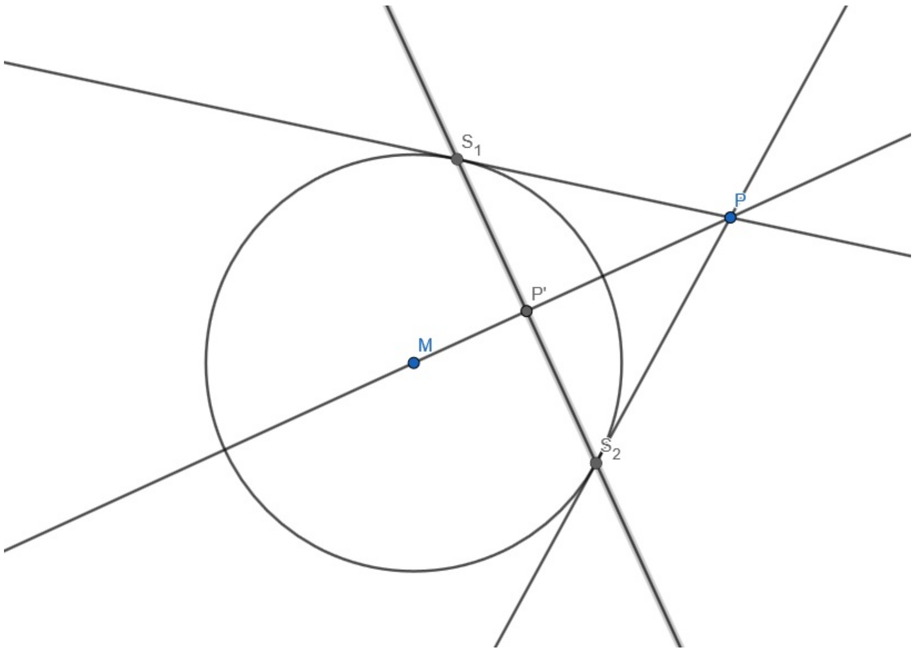
Aufgabe 6.6 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal spielen in der Schule eine große Rolle. Dabei geht es auch darum, die mathematischen Zusammenhänge zu verstehen, die für die Konstruktion genutzt werden.

1. Lösen Sie folgende typische Konstruktionsaufgabe aus der Schule (Lambacher Schweizer (2016). Mathematik für Gymnasien, Klasse 7, S. 137):

   'Zeichne einen Kreis um M mit Radius von $3,5$ cm und einen Punkt P mit $|MP| = 8$ cm. Konstruiere die Tangenten an den Kreis durch den Punkt P.'

   Welchen Satz aus der (Schul-)Geometrie haben Sie hier verwendet?

2. Eine Konstruktion von Tangenten wie in a) ist Grundlage für die Konstruktion der Kreisspiegelung. Bei der Spiegelung eines Punktes P an einem Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M gilt für den Bildpunkt P' folgende Bedingung: $|MP'| = \frac{R^2}{|MP|}$.



   (a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Satzes aus der (Schul-)Geometrie, dass die Punkte P und P' aus der obigen Skizze die genannte Bedingung erfüllen.

   (b) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Kreisspiegelung eines Punktes P an einem Kreis, für P innerhalb und für P außerhalb des Kreises. Formulieren Sie jeweils eine Konstruktionsbeschreibung.

(4 Bonuspunkte)