Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder
M.Sc. Pedro Núñez

Übungsblatt 9

Abgabe: 08.07.2022

Aufgabe 9.1. Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Sei $g \subseteq X$ eine Gerade sowie v ein Richtungsvektor von g und $x \in g$. Sei $s \in K$ die Spiegelung am Lot auf g durch x. Bestimmen Sie grafisch (in einer konkreten Zeichnung) die Kongruenz $\psi \in K$, für die gilt, dass $\psi \circ s$ die Verschiebung um v entlang g ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2. Wir betrachten die kartesische Ebene $X = \mathbb{R}^2$. Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ sind *orthogonal*, wenn $\langle x, y \rangle = 0$, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Normalerweise nennt man zwei Geraden in der kartesischen Ebene *senkrecht*, wenn die zugehörige Richtungsvektoren orthogonal sind. In dieser Aufgabe vergleichen wir diese Definition mit der abstrakten Definition von senkrechten Geraden in einer Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzen:

(a) Zeigen Sie: Zwei Geraden $g, h \subseteq X$ haben orthogonale Richtungsvektoren genau dann, wenn $g \neq h$ und $s_g(h) = h$, wobei s_g die *Spiegelung an* g ist.

(b) Zeigen Sie: Zwei Geraden $g, h \subseteq X$ haben orthogonale Richtungsvektoren genau dann, wenn die Spiegelungen kommutieren, also $s_g s_h = s_h s_g$.

(6 Punkte)

Aufgabe 9.3. Eine affine Bewegung ϕ der kartesische Ebene $\mathbb{R}^2$ erfüllt $\phi((3,4)) = (-3,6)$, $\phi((-8,11)) = (10,5)$ und $\phi((-1,2)) = (-1,2)$. Zeigen Sie, dass es sich um eine Spiegelung handelt, und geben Sie auch die zugehörige Gerade an.

(4 Punkte)

Bonusaufgabe 9.4. Wir definieren die *Moultonebene* wie folgt. Sei $X = \mathbb{R}^2$. Sei $G = \{g_{m,b} \mid m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, b \in \mathbb{R}\}$, wobei $g_{m,b}$ folgendermaßen definiert ist:

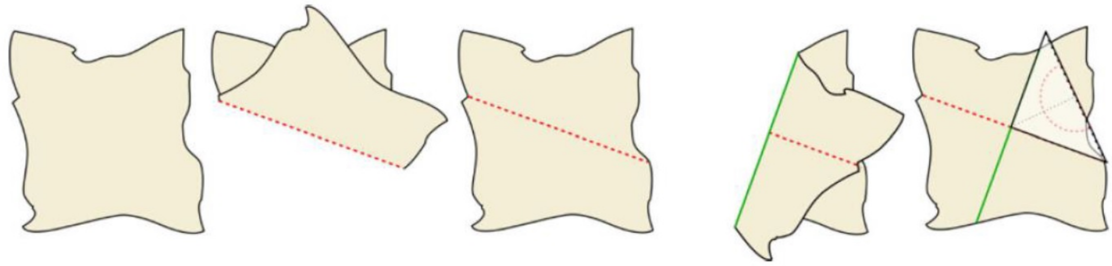
- $g_{m,b} := \{(x,y) \in X \mid x = b\}$ falls $m = \infty$.
- $g_{m,b} := \{(x,y) \in X \mid y = mx + b\}$ falls $m \geq 0$.
- $g_{m,b} := \left\{(x,y) \in X \mid \begin{cases} y = mx + b & \text{für } x \geq 0, \\ y = 2mx + b & \text{für } x < 0 \end{cases}\right\}$ falls $m < 0$.

Zeichnen Sie jeweils zwei Geraden jedes Typs. Zeigen Sie, dass (X, G) eine Inzidenzgeometrie ist, in der das starke Parallelenaxiom gilt. Definieren Sie eine sinnvolle Zwischenrelation auf der Moultonebene und verifizieren Sie die einzelnen Punkte aus Definition 3.2 im Skript dafür.

(6 Bonuspunkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 9.5 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** In der Schule wird das Senkrechtstehen zweier Geraden häufig durch doppeltes Falten eingeführt:



Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der mathematischen Definition von 'senkrecht' aus der Vorlesung und der dargestellten Papierfaltung.

(2 Bonuspunkte)