Mathematisches Institut, Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Probeklausur:	**Lineare Algebra I WS 2018/19**
Prüfungsdauer:	3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel:	1 handbeschriebenes DIN A4 Blatt
Prüfer:	Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Aufgabe K.1: Geben Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen durch **Ja** oder **Nein** an, und schreiben Sie eine kurze Begründung in 1–2 Sätzen.

1. Sei A eine Matrix von vollem Rang. Dann ist jedes Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar.

2. $\{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ ist eine Untergruppe von S_n.

3. $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) = 2\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$.

4. Sei V ein k-Vektorraum der Dimension n und $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem. Dann ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis.

5. Seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume. Dann gilt $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

6. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit quadratischer darstellender Matrix. Dann ist $\dim V = \dim W$.

7. Sei k ein Körper, $A, B \in M_n(k)$. Dann gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

8. Sei $f : V \to V$ lineare Abbildung von endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Dann hat f einen Eigenwert.

Aufgabe K.2: Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die folgende lineare Abbildung mit darstellender Matrix in der Standardbasis

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ und $\mathrm{rg}(f)$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ an.

Aufgabe K.3: Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von x

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ x & -2 & x & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe K.4: Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : M_2(k) \to M_2(k)$ definiert durch

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenräume von f.

Aufgabe K.5: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ und sei $A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in M_n(\mathbb{R})$ die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$ als Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.
Hinweis: Entwickeln Sie nach der zweiten Spalte.

Aufgabe K.6: Seien G, H, K Gruppen. Seien $f : G \to H$ und $g : H \to K$ Abbildungen. Die Abbildungen g und $g \circ f$ seien Gruppenhomomorphismus, und die Abbildung g sei injektiv. Zeigen Sie, dass auch f ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe K.7: Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei V^* bzw. W^* der duale Vektorraum und $f^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung von f, d.h. f^* is definiert durch

$$f^*(\lambda)(v) = \lambda(f(v)) \qquad \text{für jedes } \lambda \in W^* \text{ und } v \in V.$$

Zeigen Sie, dass

$$\dim(\operatorname{Ker} f^*) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim W - \dim V.$$