"Lineare Algebra"
WS 2018/19 — Übungsblatt 10

Ausgabe: 10.1.2019, **Abgabe**: 18.1.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html`
Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte fur das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Gegeben sei die folgende Matrix in $M_4(\mathbb{F}_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$.

(3 Punkte)

Aufgabe 10.2: Gegeben sei die folgende Matrix in $M_3(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.3: Sei $\sigma \in S_7$ die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\mathrm{sgn}(\sigma)$,

(2 Punkte)

Aufgabe 10.4: Sei $B_n \in M_n(\mathbb{R})$ die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

In Formeln: wir haben $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$ mit

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j \\ -2 & \text{falls } i = n-1 \text{ und } j = n \\ -1 & \text{falls } |i-j| = 1 \text{ und } j \neq n \\ 0 & \text{falls } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass $\det(B_n) = 2\det(B_{n-1}) - \det(B_{n-2})$ für $n > 2$ gilt.

ii) Berechnen Sie $\det(B_n)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 10.5: (Die Vandermonde-Determinante): Sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in k$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.6: : (Determinanten als Volumen): Gegeben seien drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass das Volumen des Parallelepiped, welches von v_1, v_2 und v_3 aufgespannt wird, gleich dem Betrag der Determinante der Matrix $A = (v_1\ v_2\ v_3)$ ist, deren Spalten die gegebenen Vektoren sind.

(6 Punkte)