"Lineare Algebra"
WS 2018/19 — Ubungsblatt 12

Ausgabe: 24.1.2019, **Abgabe**: 1.2.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html`
Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte fur das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 12.1: Stellen Sie die folgende Permutation als Produkt von Transpositionen dar:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 12.2: Der Kern des Vorzeichens $sgn : S_n \to (\{\pm 1\}, \cdot)$ ist die alternierende Gruppe A_n. Geben Sie alle Elemente von A_3 an.

(2 Punkte)

Aufgabe 12.3: Sind die folgende Abbildungen Gruppenhomomorphismus oder nicht? Geben Sie eine kurze Begründung.

1. $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), \quad f(x) = e^x.$
2. $f : S_n \to S_n, \quad f(\sigma) = \sigma^{-1}, \quad$ für $n \geq 3$.
3. $f : (\mathbb{R}, +) \to GL_2(\mathbb{R}), \quad f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$

(4 Punkte)

Aufgabe 12.4: Seien G, H Gruppen und $f : G \to H$ eine Isomorphismus von Gruppen. Zeigen Sie, dass $f^{-1} : H \to G$ eine Gruppenhomomorphismus ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 12.5: Sei $\mathbb{F}_p$ ein endlicher Körper mit p Elementen. Berechnen Sie, wie viele Elemente $GL_2(\mathbb{F}_p)$ hat.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.6: : Sei $A = (a_{i,j}) \in GL_n(k)$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j$.
Zeigen Sie: A ist das Produkt einer Diagonalmatrix D und einer Matrix S, die ein Produkt von Elementarmatrizen $E_{i,j}(\lambda)$ mit $i < j$ ist.
(*Hinweis:* Passen Sie den Beweis von Satz 8.9 an.)

(6 Punkte)