

# Lineare Algebra Weihnachtszettel

## Musterlösungen

Januar 2019

Die folgenden Musterlösungen sind weitgehend so aufgeschrieben, wie wir dies beim Bearbeiten von Übungsaufgaben erwarten. Kleinere Differenzen ergeben sich durch die Benutzung von Latex statt eines handschriftlichen Zettels.

*Aussagen in italics sind zusätzliche Kommentare oder Erläuterungen.*

---

### Aufgabe 1.1:

- Eine Gruppe ist ein Paar  $(G, \cdot)$  bestehend aus einer Menge  $G$  und einer Verknüpfung

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

die die Gruppenaxiome erfüllt:

1.  $\cdot$  ist assoziativ.
  2. Es gibt ein neutrales Element  $e \in G$  mit  $eg = ge = g$  für alle  $g \in G$ .
  3. Für jedes  $g \in G$  gibt es ein inverses Element, d.h. ein  $h \in G$  mit  $gh = hg = e$ .
- Sei  $k$  ein Körper. Ein  $k$ -Vektorraum ist eine abelsche Gruppe  $(V, +)$  zusammen mit einer Verknüpfung

$$\cdot : k \times V \rightarrow V$$

so dass die Vektorraumaxiome erfüllt sind:

1. Assoziativität: Für alle  $\lambda, \mu \in k, v \in V$  gilt  $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
2. Distributivität: Für alle  $\lambda, \mu \in k, v, w \in V$  gilt  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ ,  
 $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ .
3. Normierung: Für alle  $v \in V$  ist  $1v = v$ .

*Man kann natürlich den Vektorraumbegriff auch definieren, ohne auf den Gruppenbegriff zurückzugreifen. Die Axiomenliste wird dann um einiges länger.*

- Sei  $v_1, \dots, v_n \in V$  eine endliche Familie von Vektoren. Die Familie heißt linear unabhängig, falls für alle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$  gilt:  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Eine beliebige Familie  $v_i \in V$  für  $i \in I$  heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist. Eine Familie von Vektoren in  $V$  heißt linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig ist. *Es gibt hier verschiedene korrekte Formulierungen.*
- Ein Erzeugendensystem ist eine Familie  $v_i \in V$  für  $i \in I$ , so dass der kleinste Untervektorraum, der  $v_i$  für alle  $i \in I$  enthält, ganz  $V$  ist. Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. *Auch hier gibt es verschiedene korrekte Formulierungen.*
- Die Dimension eines Vektorraums ist die Anzahl der Elemente einer beliebigen Basis. Der Satz von der Invarianz der Dimension besagt, dass dies wohldefiniert ist: Die Anzahl der Elemente einer Basis hängt nicht von der Wahl der Basis ab.
- Sei  $k$  ein Körper,  $V, W$  seien  $k$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt linear, wenn für alle  $\lambda, \mu \in k$  und  $v, v' \in V$  gilt  $f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v')$ .  
Die Dimensionsformel besagt, dass  $\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$ .
- Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung,  $A = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  und  $B = (w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $W$ . Dann gibt es  $\lambda_{ij} \in k$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ), so dass  $f(v_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} w_i$ . Dann heißt  $M = (\lambda_{ij})$  darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Basen  $A$  und  $B$ . Ändern sich die Basen, so ändert sich auch die Matrix. Sie ist also nicht eindeutig durch die Abbildung bestimmt.

*Achtung: Es genügt nicht, dass Ihnen diese Aussagen beim Durchlesen bekannt und richtig erscheinen. Schreiben Sie es hin! Achten Sie bei der Kontrolle auf präzisen Gebrauch der Quantoren: für alle/es gibt? Wenn nicht klar ist, was Sie meinen, so ist das schlimmer, als wenn Sie einen Fehler machen.*

### Aufgabe 1.2:

- Gruppen:
  1. die symmetrische Gruppe  $S_n$  der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit der Komposition von Permutationen;
  2.  $\operatorname{Aut}_k(V)$  die Gruppe der Automorphismen eines Vektorraums  $V$ ;
  3.  $\mathbb{Z}$  die Gruppe der ganzen Zahlen bezüglich der Addition von Zahlen.

Vektorräume:

1. Sei  $k$  ein Körper. Dann ist  $k^n$  der Vektorraum der Spaltenvektoren der Länge  $n$  bezüglich der Vektoraddition.
2. Sei  $k$  ein Körper. Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, so ist  $V = \{x \in k^n \mid Ax = 0\}$  ein Untervektorraum des  $k^n$ .

3. Für  $k = \mathbb{R}$  und  $U \subset \mathbb{R}$  eine offene Teilmenge ist  $C(U, \mathbb{R})$ , die Menge der stetigen Funktionen von  $U$  nach  $\mathbb{R}$ , ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bezüglich der Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen. Dieser Raum ist unendlich-dimensional, da z.B. alle Polynomfunktionen  $x \mapsto x^n$  linear unabhängig sind.

- Sei  $V$  ein Vektorraum.  $\text{End}(V)$  ist ein Vektorraum (und damit eine abelsche Gruppe) bezüglich der Addition von Abbildungen. Er ist keine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen, da z.B. die Nullabbildung nicht invertierbar ist.
- Wir geben eine Basis an: Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $e_i$  der Spaltenvektor, der an der  $i$ -ten Stelle eine 1 hat, sonst nur 0. Man sieht leicht, dass dies eine Basis ist.
- Sei  $e_{ij} = (a_{rs})_{r=1, s=1}^{n, n}$  die Matrix mit  $a_{ij} = 1$ ,  $a_{rs} = 0$  für  $(r, s) \neq (i, j)$ . Man sieht leicht, dass dies eine Basis ist.
- Sei  $i \in \mathbb{C}$  die imaginäre Einheit. Dann ist das Paar  $1, i$  eine Basis von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und 1 eine Basis von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.
- Sei  $n = \dim(V)$  und  $v_i, i = 1, \dots, n$  eine Basis von  $V$ . Sei  $v_j^* \in V^*$  definiert durch

$$v_j^*(v_i) = \delta_{ij}.$$

Dann ist  $v_i^*, i = 1, \dots, n$  eine Basis von  $V^*$ , und so  $\dim(V^*) = n$ .

- Falls  $\det(f) \neq 0$ , dann ist  $f$  eine Automorphismus von  $V$ .

### Aufgabe 2.1:

- (a) Falsch. Das Gleichungssystem  $A = 0, b = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$  ist auch für  $n = m$  unlösbar.
  - (b) Falsch. Ist  $k = \mathbb{F}_2$ , so hat jedes Gleichungssystem höchstens endlich viele Lösungen, da  $(\mathbb{F}_2)^n$  nur endliche viele Elemente hat (nämlich  $2^n$ ). *Richtig ist, dass der Lösungsraum eine positive Dimension hat. Aber nur über unendlichen Körpern haben die auch unendlich viele Elemente.*
  - (c) Richtig, weil es die Lösung  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  gibt.
- Nein. Für  $k = \mathbb{F}_2$  ist  $2 \cdot 1_k = 1_k + 1_k = 0_k$ . Für  $k = \mathbb{F}_3$  ist  $3 \cdot 1_k = 0_k$ .
- (a) Richtig. In  $V$  hat jede Basis, also jede maximale linear unabhängige Familie,  $n$  Elemente.
  - (b) Falsch. Die Familie  $v_1 = \dots = v_n = 0$  ist linear abhängig.
  - (c) Falsch. Die Familie  $v_1 = \dots = v_n = 0$  ist keine Basis.

- (d) Richtig. Jede Basis hat  $n$  Elemente.
4. (a) Falsch. Ist  $f$  die Nullabbildung ( $f(v) = 0$  für alle  $v \in V$ ), so ist die Bildfamilie nicht linear unabhängig.  
 (b) Sinnlos. Die  $f(v_i)$  liegen nicht in  $V$ , während  $\ker f \subset V$ .  
 (c) Richtig. Die Bilder  $f(v_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  sind ein Erzeugendensystem von  $\text{Im } f$ .
5. (a) Falsch. Ist  $f$  die Nullabbildung und  $n > 0$ , so ist  $f$  nicht injektiv.  
 (b) Richtig. Aus der Dimensionsformel folgt  $\dim(\text{Ker}(f)) > 0$ .  
 (c) Falsch. Dass die darstellende Matrix quadratisch ist, impliziert dass  $\dim V = \dim W$ . Für  $f$  die Nullabbildung ist dies kein Isomorphismus. *Außer für  $n = m = 0$ . Stillschweigend sind wir von  $n, m \geq 1$  ausgegangen. Im allgemeinen ist die Aussage also falsch.*  
 (d) Richtig. Ist  $M_B^A(f)$  nicht quadratisch, so ist  $\dim V \neq \dim W$  und die Vektorräume sind nicht isomorph. Insbesondere ist  $f$  kein Isomorphismus.  
 (e) Richtig. Falls  $\dim V = \dim W$ , so sind die Vektorräume isomorph. *Aber  $f$  ist nicht notwendig ein Isomorphismus!*  
 (f) Falsch. Falls  $A \neq B$ , so erhalten wir eine nichttriviale Basiswechselmatrix.  
 (g) Richtig. Wir wählen  $B = f(A)$ , die Bildbasis.
6. (a) Falsch. Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  haben wir  $\det(A) = 1$ .  
 (b) Falsch. Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  haben wir  $\det(A) = 0$ .  
 (c) Richtig. Das folgt aus der Entwicklungsformel der Determinante.  
 (d) Falsch. Seien  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dann  $\det(A) = \det(B) = 0$ , aber  $A + B = E_2$ , so  $\det(A + B) = 1$ .  
 (e) Richtig. Das ist Theorem 6.8 aus dem Skript.  
 (f) Falsch. Sei  $A = E_2$ , dann  $\det(-A) = 1$ .  
*Aber: für  $A \in M_n(k)$  gilt  $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ .*

*Alle Aussagen müssen begründet werden! Eine Aussage ist falsch, wenn sie in einem Spezialfall falsch ist.*

**Aufgabe 2.2:** Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann können wir jedes Element  $v \in V$  eindeutig schreiben als

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

mit  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}_2$ . Jedes  $a_i$  kann 0 oder 1 sein, also  $n$  mal zwei Möglichkeiten. Insgesamt gibt es  $2^n$  Elemente.

**Aufgabe 2.3:**

Es geht nur darum, den Rang der Matrix zu bestimmen. Zunächst ein Rechenweg: Wir wenden elementare Spaltentransformationen an. Zunächst Subtraktion der ersten Spalte von den weiteren, dann der zweiten von den weiteren, usw.

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ a & a & b & \dots & b \\ a & a & a & \dots & b \\ & & \dots & & \\ a & a & a & \dots & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b-a & b-a & \dots & b-a \\ a & 0 & b-a & \dots & b-a \\ a & 0 & 0 & \dots & b-a \\ & & \dots & & \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b-a & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & b-a & \dots & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Nun bietet es sich an, die letzte Zeile von den darüberstehenden zu subtrahieren:

$$\begin{pmatrix} 0 & b-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b-a & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b-a \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Hier kann man nun den Rang ablesen. Er ist im allgemeinen  $n$ . Ausnahmen entstehen für  $a = 0$  und für  $a = b$ . Wir kommen nun zur Formulierung der Antwort.

Wir unterscheiden die Fälle:

1. Im allgemeinen Fall  $a \neq b$ ,  $a \neq 0$  hat die Matrix den Rang  $n$  und die Normalform ist  $E_n$ .
2. Im Fall  $a = b = 0$  hat die Matrix den Rang 0 und die Normalform 0.
3. Im Fall  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  hat die Matrix den Rang  $n - 1$  und die Normalform

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Im Fall  $a = b \neq 0$  hat die Matrix den Rang 1 und die Normalform

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um eine einfache Anwendung des Gauß-Algorithmus.

**Aufgabe 2.4:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrix über  $\mathbb{Q}$ . Die Spalten sind  $e_1, e_2, e_1 + e_2, 2e_1 + e_2$ . Offensichtlich sind je zwei Spalten linear unabhängig, weil  $2 \neq 0$ . Je drei jedoch sind jedoch linear abhängig.

**Aufgabe 2.5:** Wir geben  $v_j$  in der Basis  $w_1, w_2, w_3$  an. Es gilt

$$\begin{aligned} 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ -14 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten bilden die Spalten der darstellenden Matrix. Diese lautet also

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -14 \\ -3 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

*Zur Bestimmung der darstellenden Matrix muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Diese Herleitung gehört eigentlich nicht zur fertigen Lösung. In Prüfungen empfiehlt sich trotzdem die Angabe des Rechenweges. In der Korrektur kann dann die Schwere des Fehlers berücksichtigt werden.*

**Aufgabe 2.6:** Die Matrix  $A$  ist invertierbar und hat die Inverse  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,

denn

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-1) & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E_2$$

Auch  $B$  ist invertierbar und hat die Inverse

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

denn

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 2-2 & 2-2 \\ -1+2-1 & -1+4-2 & -1+4-3 \\ -1+1 & -2+2 & -2+3 \end{pmatrix} = E_3$$

*Dies ist eine gültige Antwort. Natürlich bestimmt man die Inverse anders, nämlich mit dem Gaußverfahren oder geschicktes Raten.*

**Aufgabe 3.1:** Sei  $f : U \rightarrow V$  linear,  $U' \subset U$  und  $V' \subset V$  mit  $f(U') \subset V'$ .

**Behauptung.**  $\bar{f} : U/U' \rightarrow V/V'$  mit  $u + U' \mapsto f(u) + V'$  für alle  $u \in U$  ist eine lineare Abbildung.

Die Projektionsabbildung  $\pi : V \rightarrow V/V'$  ist linear. Wir betrachten die lineare Abbildung  $F = \pi \circ f : U \rightarrow V/V'$ . Es gilt also  $F(u) = f(u) + V'$ . Auf diese Abbildung wenden wir den Homomorphiesatz an. Hierfür müssen wir  $U' \subset \ker F$  überprüfen. Für jedes  $u' \in U'$  gilt

$$F(u') = f(u') + V' = V'$$

da  $f(u') \in V'$ . Nach dem Homomorphiesatz faktorisiert  $F$  eindeutig über  $\bar{f}$ .

*Alternativ kann man den Beweis des Homomorphiesatzes wiederholen:*

Die Linearität des angegebenen  $\bar{f}$  folgt sofort aus der Linearität von  $f$ . Zu überprüfen ist die Wohldefiniertheit. Sei also  $u_1 + U' = u_2 + U' \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in U'$ . Hieraus folgt

$$f(u_1) - f(u_2) = f(u_1 - u_2) \in V'$$

da  $f(U') \subset V'$ . Damit gilt

$$\bar{f}(u_1 + U') - \bar{f}(u_2 + U') = (f(u_1) + V') - (f(u_2) + V') = (f(u_1) - f(u_2)) + V' = V'$$

Dies ist die Wohldefiniertheit.

**Aufgabe 3.2:**

Seien  $\lambda, \mu \in V^*$ ,  $a, b \in k$ . Wir betrachten  $f^*(a\lambda + b\mu) = (a\lambda + b\mu) \circ f$  und  $af^*(\lambda) + bf^*(\mu) = a\lambda \circ f + b\mu \circ f$ . Zu überprüfen ist die Gleichheit dieser beiden Elemente von  $U^* = \text{Hom}_k(U, k)$ . Eine Gleichheit von Abbildungen überprüft man, in dem man jedes  $u \in U$  einsetzt. Für  $u \in U$  gilt

$$(a\lambda + b\mu) \circ f(u) = (a\lambda + b\mu)(f(u)) = a\lambda(f(u)) + b\mu(f(u))$$

$$(a\lambda \circ f + b\mu \circ f)(u) = a\lambda \circ f(u) + b\mu \circ f(u) = a\lambda(f(u)) + b\mu(f(u))$$

**Aufgabe 3.3:** Im allgemeinen nein. Eine lineare Abbildung muss 0 auf 0 abbilden. Die Fixpunkte einer Drehung (ungleich der Identität) sind die Punkte auf der Drehachse. Wenn die Drehachse nicht durch 0 geht, so ist die Abbildung nicht linear.

Geht die Drehachse durch 0, so erhält man eine lineare Abbildung. Wir wählen ein geeignetes Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$ , so dass die Drehachse gleich der  $z$ -Achse ist. In diesem Fall ist Drehung um den Winkel  $\alpha$  gegeben durch Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3.4:**

- (i) Sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Basis von  $U$ . Die Familie ist linear unabhängig in  $V$ , hat also höchstens so viele Elemente wie eine maximale linear unabhängige Familie in  $V$ . Deren Anzahl ist nach Definition die Dimension.

- (ii) Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Sei  $\bar{v}_i = v_i + U$ . Dann ist  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  ein Erzeugendensystem von  $V/U$  (Vorlesung). Deren Anzahl ist mindestens die Anzahl der Elemente in einem minimalen Erzeugendensystem von  $V/U$ , also die Dimension.
- (iii) Ist  $U = V$ , so gilt natürlich  $\dim U = \dim V$ . Sei nun  $\dim U = \dim V$ . Mit den Notationen aus (i) ist dann  $u_1, \dots, u_n$  bereits ein maximales System von linear unabhängigen Vektoren in  $V$ , also eine Basis.

*Eleganter geht es so:* Wir wenden die Dimensionsformel an auf die Projektion  $V \rightarrow V/U$ . Sie hat den Kern  $U$  und das Bild  $V/U$ .

$$\dim V = \dim U + \dim V/U$$

Also ist

$$\dim V = \dim U \Leftrightarrow \dim V/U = 0 \Leftrightarrow V = U$$

Die erste Äquivalenz benutzt die Endlichdimensionalität von  $V$  und seines Unterraums  $U$ .

- (iv) Genauso:

$$\dim V = \dim V/U \Leftrightarrow \dim U = 0 \Leftrightarrow U = 0$$

**Aufgabe 3.5:** Seien  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann haben wir

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$[A^i, A^j] = A^i A^j - A^j A^i = A^{i+j} - A^{i+j} = 0$$

wegen der Assoziativität der Matrizenmultiplikation.

**Aufgabe 3.6:** Wenn  $A^2 = 0$ , dann  $\det(A)^2 = \det(A^2) = 0$  und so auch  $\det(A) = 0$ . Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Wir haben  $\det(A) = 0$  und  $A^2 = A \neq 0$ .

**Aufgabe 3.7:** Das folgt aus der Leibniz-Formel:

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (\lambda a_{1,\sigma(1)}) (\lambda a_{2,\sigma(2)}) \dots (\lambda a_{n,\sigma(n)}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \lambda^n a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.8:**

- Seien  $A, B \in T$ , mit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  und  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ , seien  $x, y \in k$ . Wir müssen zeigen, dass  $xA + yB \in T$ . Der Eintrag von  $xA + yB$  an der Stelle  $(i, j)$  ist  $xa_{i,j} + yb_{i,j}$ . Er ist null, wenn  $i > j$ .

- Sei  $E_{i,j} \in M_n(k)$  die Matrix, deren Eintrag an der Stelle  $(i,j)$  gleich 1 ist und alle anderen null sind. Dann bilden die Matrizen  $E_{i,j}$  mit  $i \leq j$  eine Basis von  $T$ . Es folgt, dass

$$\dim(T) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Beweis 1: Wir argumentieren mit vollständiger Induktion nach  $n$ . Die Aussage ist wahr für  $n = 1$ .

Angenommen, die Aussage gilt für  $n-1$ . Sei  $A \in T$  und  $A_{11} \in M_{n-1}(k)$  die Streichmatrix, die man durch Löscher der ersten Zeile und Spalte erhält. Da  $A_{11}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\det(A_{11}) = \prod_{i=2}^n a_{i,i}.$$

Mit der Entwicklungsformel für die erste Spalte erhalten wir

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Beweis 2: Wir benutzen die Leibniz-Formel. Sei  $\sigma$  eine Permutation mit  $\sigma \neq \text{id}$ . Dann gibt es  $i$  with  $\sigma(i) < i$ , also  $a_{i\sigma(i)} = 0$ . Der Summand zu  $\sigma$  verschwindet also. Übrig bleibt nur der Beitrag von  $\sigma = \text{id}$ , also

$$\det(A) = \text{sgn}(\text{id}) a_{1,\text{id}(1)} a_{2,\text{id}(2)} \dots a_{n,\text{id}(n)} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

**Aufgabe 4.1:** Sei  $e$  das neutrale Element, also  $eb = be = b$  für alle  $b \in G$ . Sei  $a \in G$  beliebig. Sei  $a'$  das Linksinverse von  $a$ . Sei weiterhin  $a''$  das Linksinverse von  $a'$ . Dann folgt

$$aa' = e(aa') = (a''a')(aa') = a''(a'a)a' = a''ea' = a''a' = e$$

Damit ist  $a'$  rechtsinvers zu  $a$ .

**Aufgabe 4.2:** Sei  $A$  ein kommutativer Ring. Seien  $a, b \in A$  nilpotente Elemente, d.h. es gibt  $n, m > 0$  mit  $a^n = b^m = 0$ .

**Behauptung.**  $a + b$  ist nilpotent.

Wir betrachten  $(a + b)^{n+m}$  und wenden die binomische Formel an. Diese gilt in allen kommutativen Ringen mit demselben Beweis wie für Zahlen.

$$(a + b)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} a^i b^{n+m-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n+m-i} + \sum_{i=n}^{n+m} a^i b^{n+m-i}$$

In der zweiten Summe ist der Exponent  $i \geq n$ , also  $a^i = 0$ . In der ersten Summe ist  $i < n$ , also  $n + m - i \geq m$  und damit  $b^{n+m-i} = 0$ . Dies beweist die Behauptung.

#### Aufgabe 4.3:

**Behauptung.** *Es genügt den Fall zu betrachten, dass die Einträge der Matrix teilerfremd sind.*

Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Ist  $M = 0$ , so gilt die Aussage. Sei  $\lambda \neq 0$  der größte gemeinsame Teiler aller Einträge, also  $M = \lambda M'$  mit  $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  mit teilerfremden  $a', b', c', d'$ . Angenommen die Behauptung gilt für  $M'$ , d.h. man kann  $M'$  in die Form  $[1, \lambda']$  bringen. Dann wird durch die selben Transformationen  $M$  in die Form  $\lambda[1, \lambda'] = [\lambda, \lambda\lambda']$  gebracht.

Sei nun  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c, d$  teilerfremd.

**Behauptung.** *Durch elementare Zeilen- und Spaltentransformationen kann erreicht werden, dass ein Eintrag 1 wird.*

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach dem minimalen Betrag eines Eintrags ungleich 0. Sei ohne Einschränkung  $a$  dieser Eintrag und  $a > 0$ . Der Induktionsanfang ist der Fall  $a = 1$ . In diesem Fall gilt die Aussage trivialerweise.

Sei nun  $a$  beliebig. Wir müssen mehrere Fälle unterscheiden.

1.  $b \neq 0$ . Dieses schreiben wir in der Form

$$b = qa + r$$

mit  $q, r \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq r < |a|$ . Durch Subtraktion des  $q$ -fachen der ersten Spalte von der zweiten erreichen wir eine Matrix  $\begin{pmatrix} a & r \\ c & d' \end{pmatrix}$ . Ist  $r > 0$ , so gilt die Behauptung mit vollständiger Induktion, da  $r < |a|$ . Ist  $r = 0$ , so sind wir in einem der anderen Fälle.

2.  $b = 0$ ,  $c \neq 0$ . Wir wiederholen das Argument mit  $c = q'a + r'$ . Wir subtrahieren das  $q'$ -fache der ersten Zeile von der zweiten. Ist  $r' > 0$ , so sind wir mit vollständiger Induktion fertig. Ist auch  $r' = 0$ , so haben wir den letzten Fall erreicht.

3.  $b = c = 0$ . Ist  $d = 0$ , so ist die Normalform erreicht. Sei also  $d \neq 0$ . Nach Voraussetzung ist  $|a| \leq |d|$ . Im Fall von Gleichheit muss  $a = \pm 1$  sein, da die Einträge als teilerfremd vorausgesetzt wurden. Dann ist auch  $d = \pm 1$  und die Normalform ist erreicht. Sei also  $|a| < |d|$ . Wir addieren die zweite Zeile zur ersten und erreichen  $\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & d \end{pmatrix}$ . Nun gehen wir wie im

ersten Schritt vor und erhalten  $\begin{pmatrix} a & r \\ 0 & d \end{pmatrix}$ . Da  $a$  und  $d$  teilerfremd sind, ist  $r \neq 0$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt die Behauptung.

Wir erreichen also eine Matrix mit  $a = 1$ . Durch Subtraktion des  $b$ -fachen der ersten Spalte von der zweiten und des  $c$ -fachen der ersten Zeile von der zweiten erreichen wir die gewünschte Normalform.

**Aufgabe 4.4:** Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Wir nehmen den Abbildungsstandpunkt ein. Es gilt  $Ae_1 = e_2$ ,  $Ae_2 = e_3$ ,  $Ae_3 = e_1 + e_2$ . Beachte  $e_i + e_i = 0$ . Wir geben die Abbildung vollständig als Tabelle an:

$$\begin{pmatrix} v : & e_1 & e_2 & e_3 & e_1 + e_2 & e_2 + e_3 & e_1 + e_2 + e_3 & e_1 + e_3 \\ Av : & e_2 & e_3 & e_1 + e_2 & e_2 + e_3 & e_1 + e_2 + e_3 & e_1 + e_3 & e_1 \end{pmatrix}$$

Die Menge  $\{A^i e_1 | i = 1, \dots, 7\}$  durchläuft  $M = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}$  genau einmal. Die Elemente  $A^1, A^2, \dots, A^7 \in M_3(\mathbb{F}_2)$  sind daher paarweise verschieden. Es gilt jedoch laut Tabelle  $A^7 e_1 = e_1$  und allgemeiner  $A^7 e_i = e_i$  für  $i = 1, 2, 3$ , also  $A^7 = A^0 = E_3$ .

Zu betrachten ist also  $K = \{0, A^0, A^1, \dots, A^6\}$ . Nach Konstruktion (und da  $0B = 0$ ) ist  $K$  abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation. Die Multiplikationstabelle ist in dieser Darstellung:

|       | 0 | $E_3$ | $A$   | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $E_3$ | 0 | $E_3$ | $A$   | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ |
| $A$   | 0 | $A$   | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ | $E_3$ |
| $A^2$ | 0 | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ | $E_3$ | $A$   |
| $A^3$ | 0 | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ | $E_3$ | $A$   | $A^2$ |
| $A^4$ | 0 | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ | $E_3$ | $A$   | $A^2$ | $A^3$ |
| $A^5$ | 0 | $A^5$ | $A^6$ | $E_3$ | $A$   | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ |
| $A^6$ | 0 | $A^6$ | $E_3$ | $A$   | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ |

**Behauptung.**  $K$  ist abgeschlossen unter Addition von Matrizen.

Wir betrachten  $A^i + A^j$  mit  $1 \leq i \leq j \leq 6$ . Wir klammern  $A^i$  aus und müssen nur die Summen  $E_3 + A^i$  für  $i = 0, \dots, 6$  bilden, da  $K$  unter Multiplikation abgeschlossen ist. Für  $i = 4, 5, 6$  multiplizieren wir mit der invertierbaren Matrix  $A^{7-i}$  und erhalten  $A^{7-i} + E_3$  wobei  $7 - i = 3, 2, 1$ . Es genügt also die Summen für  $i = 0, \dots, 4$  zu bilden. Wir werten zunächst in  $e_1, e_2, e_3$  aus.

|             | $e_1$                          | $e_2$                 | $e_3$                       |       |
|-------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------------|-------|
| $E_3 + E_3$ | $e_1 + e_1 = 0$                | $e_2 + e_2 = 0$       | $e_3 + e_3 = 0$             | 0     |
| $E_3 + A$   | $e_1 + e_2 = A^3 e_1$          | $e_2 + e_3 = A^3 e_2$ | $e_3 + e_1 + e_2 = A^3 e_2$ | $A^3$ |
| $E_3 + A^2$ | $e_1 + e_3 = A^6 e_1$          | $e_1 = A^6 e_2$       | $e_2 = A^6 e_3$             | $A^6$ |
| $E_3 + A^3$ | $e_1 + e_1 + e_2 = e_2 = Ae_1$ | $e_3 = Ae_2$          | $e_1 + e_2 = Ae_3$          | $A^3$ |

Die Menge ist also unter Addition abgeschlossen. Die Additionstabelle lautet:

|       | 0     | $E_3$ | $A$   | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | $E_3$ | $A$   | $A^2$ | $A^3$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^6$ |
| $E_3$ | $E_3$ | 0     | $A^3$ | $A^6$ | $A$   | $A^5$ | $A^4$ | $A^2$ |
| $A$   | $A$   | $A^3$ | 0     | $A^4$ | $E_3$ | $A^2$ | $A^6$ | $A^5$ |
| $A^2$ | $A^2$ | $A^6$ | $A^4$ | 0     | $A^5$ | $A$   | $A^3$ | $E_3$ |
| $A^3$ | $A^3$ | $A$   | $E_3$ | $A^5$ | 0     | $A^6$ | $A^2$ | $A^4$ |
| $A^4$ | $A^4$ | $A^5$ | $A^2$ | $A$   | $A^6$ | 0     | $E_3$ | $A^3$ |
| $A^5$ | $A^5$ | $A^4$ | $A^6$ | $A^3$ | $A^2$ | $E_3$ | 0     | $A$   |
| $A^6$ | $A^6$ | $A^2$ | $A^5$ | $E_3$ | $A^4$ | $A^3$ | $A$   | 0     |

**Behauptung.**  $K$  ist ein Körper.

Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze gelten, da sie für Matrizen gelten.  $K \setminus \{0\}$  ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation, da in der Multiplikationstabelle jedes Element in jeder Zeile und Spalte vorkommt. (Oder da  $A^i A^{7-i} = A^7 = E_3$ ). Bezüglich der Addition ist jedes Element zu sich selbst invers, daher ist auch  $(K, +)$  eine Gruppe.

Mit weniger Rechnung geht es auch so: Nach Definition ist

$$e_2 = Ae_1, e_3 = Ae_2 = A^2e_1, A^3e_1 = Ae_3 = e_1 + e_2 = E_3e_1 + Ae_1 \Rightarrow (A^3 + A + E_3)e_1 = 0$$

Hieraus folgt durch Anwenden von  $A$  und  $A^2$ :

$$\begin{aligned} (A^3 + A + E_3)e_2 &= (A^3 + A + E_3)Ae_1 = A(A^3 + A + E_3)e_1 = 0 \\ (A^3 + A + E_3)e_3 &= (A^3 + A + E_3)A^2e_1 = A^2(A^3 + A + E_3)e_1 = 0 \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$A^3 + A + E_3 = 0$$

Hieraus rechnen wir die weiteren Potenzen aus:

$$\begin{aligned} A^3 &= A + E_3, A^4 = A^2 + A, A^5 = A^3 + A^2 = A + E_3 + A^2 \\ A^6 &= A^3 + A^2 + A = A + E_3 + A^2 + A = E_3 + A^2, A^7 = E_3 \end{aligned}$$

Sei  $K = \{0, E_3, A, \dots, A^6\}$  die Menge dieser Potenzen. Es handelt sich genau um die Elemente des  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraums mit Basis  $E_3, A, A^2$ . Insbesondere ist diese Menge abgeschlossen unter Addition. Die Axiome eines kommutativen Rings sind erfüllt, da sie im Matrizenring gelten. Das Inverse von  $A^i$  ist  $A^{7-i}$ , also handelt es sich um einen Körper.

**Aufgabe 4.5:**

1. Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Dann ist  $\text{tr}(A) = a + d, \det(A) = ad - bc$ . Es folgt

$$\begin{aligned} A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)E_2 &= \\ \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 - ad & -ab - bd \\ -ac - cd & -ad - d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} [A, B] &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ? \\ ? & cb' + dd' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} aa' + b'c & ? \\ ? & c'b + dd' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Matrix hat Spur 0. Die Aussage folgt daher aus Teil (i).

3. Wir setzen die Formel aus (ii) ein:

$$\begin{aligned} [[A, B]^2, C] &= [-\det([A, B])E_2, C] = -\det([A, B])[E_2, C] \\ &= -\det([A, B])(E_2C - CE_2) = 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.6:** Wir zerlegen  $V = V_1 \oplus V_2$  mit  $V_1 = \ker p$  und  $V_2 = \text{Im } p$ . Die Abbildung  $p : V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2$  ist dann die Projektion  $(v_1, v_2) \mapsto v_2$ . Die Abbildung  $q : V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2$  hat die Form

$$(v_1, v_2) \mapsto (a(v_1) + b(v_2), c(v_1) + d(v_2))$$

mit linearen Abbildungen  $a, b, c, d$ . Nach Definition ist  $p + q$  genau dann ein Projektor, falls

$$p + q = (p + q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + pq + qp + q \Leftrightarrow pq + qp = 0$$

In unserer Zerlegung ist

$$\begin{aligned} pq &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \\ qp &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$p + q$  ist also genau dann ein Projektor, wenn  $b, c, d$  verschwinden. (Hier geht die Voraussetzung  $2 \neq 0$  ein.) Dies ist ebenfalls äquivalent zu  $pq = qp = 0$ .

Sei nun  $p+q$  ein Projektor. Mit den Notationen des ersten Teils ist  $q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

wobei  $a : V_1 \rightarrow V_1$  ein Projektor, und  $p+q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$ . Es gilt

$$\ker(p+q) = \{(v_1, v_2) | a(v_1) = 0, v_2 = 0\} = \ker p \cap \ker q$$

Wegen  $\text{Im } p \cap \text{Im } q = 0$  folgt

$$\text{Im}(p+q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$$

#### Aufgabe 4.7:

- Die  $p_i$  sind linear, also auch die  $p_i \circ f$ . Damit ist die Abbildung wohldefiniert. Sie ist offensichtlich linear.

Injektivität: Seien  $f, g$  Elemente der linken Seite. Für jedes  $w \in W$  hat  $f(w)$  die Form  $(f(w)_i)_{i \in I}$  mit  $f(w)_i \in V_i$ . Hierbei ist  $f(w)_i = p_i \circ f(w)$ . Sei  $p_i \circ f = p_i \circ g$  für alle  $i$ . Für jedes  $w \in W$  gilt also  $f(w)_i = g(w)_i$  für alle  $i \in I$ . Dies bedeutet  $f(w) = g(w)$  für alle  $w \in W$ , also  $f = g$ .

Surjektivität: Gegeben seien  $f_i \in \text{Hom}_k(W, V_i)$ . Wir setzen  $f(w) = (f_i(w))_{i \in I}$ . Dies ist eine wohldefinierte lineare Abbildung und das gesuchte Urbild.

- Die  $\iota_i$  sind linear, also auch die  $f \circ \iota_i$ . Damit ist die Abbildung wohldefiniert und offensichtlich auch linear.

Sei  $v \in \bigoplus V_i$ , also  $v = (v_i)_{i \in I}$  und für fast alle  $i \in I$  ist  $v_i = 0$ . Es gilt

$$v = \sum_{i \in I} \iota_i(v_i)$$

die Summe ist wohldefiniert, da nur endlich viele Summanden ungleich null sind.

Injektivität: Seien  $f, g$  auf der linken Seite mit gleichem Bild, also  $f \circ \iota_i = g \circ \iota_i$  für alle  $i \in I$ . Für jedes  $v = \sum \iota_i(v_i)$  und wegen der Linearität von  $f$  und  $g$  folgt für alle  $v \in V$

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum \iota_i(v_i)\right) = \sum f \circ \iota_i(v_i) = \sum g \circ \iota_i(v_i) = g\left(\sum \iota_i(v_i)\right) = g(v) \\ &\Rightarrow f = g \end{aligned}$$

Surjektivität: Seien  $f_i \in \text{Hom}_k(V_i, W)$ . Für jedes  $v = \sum \iota_i v_i$  setzen wir

$$f(v) = \sum f_i(v_i)$$

Die Summe ist wohldefiniert, da nur endlich viele Summanden ungleich 0 sind. Dann ist  $f \circ \iota_i = f_i$ . Dies ist das gesuchte Urbild.

**Aufgabe 4.8:** Sei  $P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \in k[x]$  mit  $a_n \neq 0$ . Nach Definition ist  $\varphi(P(x))(x^n) = a_n \neq 0$ , also ist  $\varphi$  injektiv. Für jedes  $P(x) \in k[x]$  gibt es  $m_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\varphi(P(x))(x^m) = 0$  für jede  $m \geq m_0$ .

Die lineare Abbildung

$$\lambda : k[x] \rightarrow k$$

definiert durch

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \mapsto P(1) = \sum_{i=1}^n a_i$$

liegt nicht in  $\text{Im}(\varphi)$ , weil  $\lambda(x^m) = 1$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 4.9:** Es gilt stets  $\text{Ker}(A^{l+1}) \supseteq \text{Ker}(A^l)$  für jedes  $l \in \mathbb{N}$ .

**Behauptung.** Wenn  $\text{Ker}(A^l) = \text{Ker}(A^{l+1})$ , dann gilt  $\text{Ker}(A^{l+1}) = \text{Ker}(A^{l+2})$ .

Sei  $x \in \text{Ker}(A^{l+2})$ . Dann ist  $Ax \in \text{Ker}(A^{l+1}) = \text{Ker}(A^l)$  und daher  $A^l Ax = A^{l+1}x = 0$ . Dies beweist die Behauptung.

Induktiv folgt dann: Wenn  $\text{Ker}(A^l) = \text{Ker}(A^{l+1})$ , dann  $\text{Ker}(A^l) = \text{Ker}(A^{l'})$  für jedes  $l' > l$ .

Sei  $m_0$  die kleinste natürliche Zahl mit  $A^{m_0} = 0$ . Dann ist  $\text{Ker}(A^{m_0-1}) \neq \text{Ker}(A^{m_0})$  und daher

$$\text{Ker}(A^0) \subsetneq \text{Ker}(A^1) \subsetneq \text{Ker}(A^2) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(A^{m_0}).$$

Es folgt  $\dim(\text{Ker}(A^i)) \geq i$  für jedes  $i = 0, 1, \dots, m_0$ . Wegen  $\dim(\text{Ker}(A^{m_0})) = n$  muss  $m_0 \leq n$  gelten. In anderen Worten:  $A^n = 0$ .

**Aufgabe 4.10:** Wir benutzen die Entwicklung-Formel nach der ersten Spalte. Es gilt also

$$\det(A_n) = 2 \det((A_{n-1})_{1,1}) - (-1) \det((A_n)_{1,2}).$$

Hier ist  $(A_n)_{1,1} = A_{n-1}$  und

$$(A_n)_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Entwicklung-Formel nach der erste Zeile folgt

$$\det((A_n)_{1,2}) = -\det(A_{n-2}).$$

Zusammen gilt die Rekursionsformel

$$\det(A_n) = 2 \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).$$

Wir haben  $\det(A_1) = 2$  und  $\det(A_2) = 3$ . Dann folgt aus Induktion  $\det(A_n) = n + 1$ , weil

$$(n + 1) = 2n - (n - 1).$$

**Aufgabe 4.11:** Seien  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$  und  $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$

1. Sei  $AB = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$ . Wir haben  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$ , also ist  $c_{i,j} \neq 0$  nur wenn es ein  $k$  mit  $i \leq k \leq j$  gibt, also wenn  $i \leq j$ . Es folgt  $AB \in T$ .
2. Wir arbeiten mit vollständiger Induktion nach  $n$ . Der Fall  $n = 1$  ist klar.

Sei die Behauptung wahr für  $n - 1$ . Die Streichmatrix  $A_{n,n} \in M_{n-1}(k)$  ist ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix. Aus Ausgabe 3.8 sehen wir, dass ihre Determinante ebenfalls ungleich null ist. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir eine obere Dreiecksmatrix  $C_{n,n} \in M_{n-1}(k)$  mit  $A_{n,n}^{-1} = C_{n,n}$ .

$$\text{Sei } v = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} \in k^{n-1}. \text{ Sei } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{pmatrix} \in k^{n-1} \text{ definiert durch}$$

$$w = -\frac{1}{a_{n,n}} A_{n,n} \cdot v.$$

Nun sei  $C$  die folgende Matrix

$$C = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & w_1 \\ & C_{n,n} & & w_2 \\ & & & \vdots \\ & & & w_{n-1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{array} \right)$$

Sie ist offensichtlich eine obere Dreiecksmatrix. Wir verifizieren

$$\begin{aligned} CA &= \left( \begin{array}{ccc|c} & & & w_1 \\ & C_{n,n} & & w_2 \\ & & & \vdots \\ & & & w_{n-1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_{1,n} \\ & A_{n,n} & & a_{2,n} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & C_{n,n}A_{n,n} & & A_{n,n} \cdot v + a_{n,n}w \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{-1}a_{n,n} \end{array} \right) = E_n \end{aligned}$$

3. Seien  $AB = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$  und  $BA = (d_{i,j})_{i,j=1}^n$ . Für jedes  $i = 1, \dots, n$  haben wir

$$c_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i} = b_{i,i}a_{i,i} = d_{i,i}.$$

Also ist  $[A, B]$  ist eine obere Dreiecksmatrix mit 0 auf der Diagonale.

Sei  $C$  eine beliebige Matrix, die eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonale 0 ist.

**Behauptung.**  $C$  ist nilpotent.

Sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis von  $k^n$ , und für  $i = 1, \dots, n$  sei  $V_i \subset k^n$  der Untervektorraum aufgespannt von  $e_1, \dots, e_i$ . Dann gilt

$$C(V_i) \subset V_{i-1}, C^2(V_i) \subset C(V_{i-1}) \subset V_{i-2} \text{ etc.}$$

Es folgt  $C^n(k^n) = C^n(V_n) \subset V_0$ , also ist  $C^n$  die Nullmatrix.

4. Die Matrizenmultiplikation  $\cdot$  definiert eine Abbildung  $T' \times T' \rightarrow T'$ . Assoziativität folgt aus der generellen Assoziativität der Matrizenmultiplikation. Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element, und für jede  $A \in T'$  gibt es nach Teilaufgabe ii) ein inverses Element  $A^{-1} \in T'$ . Also, ist  $T'$  eine Gruppe.