"Lineare Algebra"
WS 2018/19 — Übungsblatt 2

Ausgabe: 25.10.2018, **Abgabe:** 2.11.2018

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie **alle** möglichen Produkte dieser drei Matrizen mit höchstens drei Faktoren an, die definiert sind (ohne sie explizit auszurechnen).

   Beispiele: M, $M \cdot N$, $K \cdot K \cdot K$, ...

2. Berechnen Sie vier dieser Produkte explizit (jeweils mit mindestens zwei Faktoren!).

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2:
Bringen Sie die folgende Matrix durch elementare Zeilen- *und* Spaltenumformungen auf Normalform (siehe Satz 1.16):

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & -7 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 2.3:

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine Lösung der Gleichungssysteme

$$A \cdot x = b \qquad \text{und} \qquad C \ \cdot x = d.$$

wobei A und C jeweils $m \times n$-Matrizen sind und b und d Vektoren mit m Einträgen. Beweisen Sie: Dann ist x auch eine Lösung der folgenden Gleichungsysteme

$$(A + C) \cdot x = b + d$$
$$(A - C) \cdot x = b - d$$
$$(D \cdot A) \cdot x = D \cdot b$$

wobei D eine $k \times m$-Matrix ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 2.4:

Seien A und B $n \times n$-Matrizen so, dass $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $B^l = 0$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass A und B **nilpotent** sind. Annahme: A und B kommutieren, d.h. $A \cdot B = B \cdot A$. Beweisen Sie: Dann sind $A \cdot B$ und $A + B$ ebenfalls nilpotent.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 2.5:

Beweisen Sie, dass beide Aussagen von Aufgabe 2.4 falsch sind, wenn $A \cdot B = B \cdot A$ nicht angenommen wird.

(4 Punkte)