"Lineare Algebra"
WS 2018/19 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 31.10.2018, **Abgabe:** 9.11.2018

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Erstsemester-Hütte

Bald ist es endlich soweit und es geht auf die Erstihütte! Alles, was ihr dazu wissen müsst, erfahrt ihr hier:

Wann geht's los?

Am Freitag, den **07.12**. und zurück kommen wir am Sonntag, den 09.12.

Wo geht es eigentlich hin?

Wir fahren ins Dekan-Strohmeier-Haus im Münstertal im Schwarzwald

Was tut man eigentlich auf so einer Hütte?

Sich entspannen, MitstudentenInnen kennenlernen, an lustigen Workshops teilnehmen, Spielchen spielen, lecker essen, Party machen…

Und was kostet das?

35 Euro, die bei der Anmeldung mitzubringen sind!

Was für eine Anmeldung?

Am Donnerstag, den 08. November, könnt ihr euch nach der Vorlesung **um 10.00 vor der Mathe-Fachschaft** verbindlich anmelden. Bitte **bringt die 35 Euro mit**, nur dann bekommt ihr einen sicheren Platz, denn die Teilnehmerzahl ist beschränkt.

Die 35 € sind **nicht kostendeckend**, das heißt, wenn ihr doch nicht kommt, können wir euch das Geld leider nicht zurückerstatten. Die Anmeldung ist also **verbindlich**!!!

Bei der Anmeldung brauchen wir von euch folgende Infos:

- Name und Geburtsdatum, E-Mail!!!
- Habt ihr ein Semesterticket?
- Könnt ihr ein Auto zur Verfügung stellen?
- Seid ihr Vegetarier o.ä. oder habt ihr Allergien, Unverträglichkeiten,…?
- Bringt ihr einen Kuchen mit?

Und mein Mathe-Zettel?

Die Erfahrung hat gezeigt, dass dafür immer genug Zeit blieb und da noch viele ältere MathestudentInnen mitfahren, könnt ihr bestimmt auch den einen oder anderen Tipp bekommen…

Wenn ihr noch Fragen habt, dann mailt uns an **erstihuette@googlemail.com**
Julius, Jonas, Daniel und die Mathefachschaft

(bitte wenden)

Aufgabe 3.1: Seien A, B und C Mengen.
Beweisen Sie

1. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Führen Sie jeweils einen sauberen Beweis und veranschaulichen Sie die Aussage in einem Mengen-Diagramm.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.2:
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind. Geben Sie knappe Begründungen.

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = 100 - z$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = z^2$,
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = z^3$,
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z & \text{falls } z \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2}(z-1) & \text{falls } z \text{ ungerade}, \end{cases}$
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3.3:
Bilden die folgenden Mengen zusammen mit der angegebenen Verknüpfung eine Gruppe? Geben Sie jeweils eine knappe Begründung für Ihre Antwort.

1. Die Menge $3\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots.\}$ zusammen mit der Addition?

2. Die Menge $1 + 3\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$ zusammen mit der Addition?

3. Die Menge aller Abbildungen $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ zusammen mit der Verkettung $\circ$?

4. Die Menge $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der reellen 2×2-Matrizen zusammen mit der Addition von Matrizen?

5. Die Menge $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der reellen 2×2-Matrizen zusammen mit der Multiplikation von Matrizen?

(5 Punkte)

Aufgabe 3.4:
Sei X eine nichtleere Menge. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X. Für Teilmengen $A, B \subseteq X$ definieren wir mittels

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die symmetrische Differenz von A und B. Zeigen Sie, dass das Paar $(\mathfrak{P}(X), \triangle)$ eine Abelsche Gruppe bildet und dass für jedes Element $A \in \mathfrak{P}(X)$, die Gleichung $A \triangle A = e$ gilt (wobei e das neutrale Element ist).

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.5:
Beweisen Sie dass die Teilmenge

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; ad - bc \neq 0 \right\} \subset \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

eine Gruppe bzgl. der Multiplikation von Matrizen bildet.

(4 Punkte)