“Lineare Algebra”
WS 2018/19 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 15.11.2018, **Abgabe:** 23.11.2018

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1:
Bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

(3 Punkte)

Aufgabe 5.2: Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und die Untervektorräume

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad V := \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von

$$U \cap V.$$

Hinweis: Übersetzen Sie das Problem in ein Gleichungssystem und lösen Sie es.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 5.3: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Für $x \in \mathbb{Z}$ bezeichnet

$$\overline{x} = x + n\mathbb{Z} = \{x + nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

die **Restklasse** von $x \in \mathbb{Z}$ modulo n. Definiere

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{\overline{x} \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

als die Menge aller Restklassen. Beweisen Sie:

1. Es gilt
$$\overline{x} = \overline{x'} \;\Leftrightarrow x - x' \in n\mathbb{Z}.$$

2. Es gibt genau die n Restklassen
$$\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}.$$

3. Auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lassen sich (siehe auch 2.17 im Skript) durch
$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$$
$$\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{x \cdot y}$$
sinnvolle Operationen definieren. *Sie müssen dazu jeweils zeigen, dass die rechte Seite nicht von der Wahl der Vertreter abhängt, also dass z.B. aus $\overline{x} = \overline{x'}$ folgt, dass $\overline{x + y} = \overline{x' + y}$, u.s.w.*

4. Die in 3. definierten Operationen machen die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zu einem kommutativen Ring.

5. Falls n eine Primzahl ist, ist die Multiplikation mit einem Element $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \overline{z} & \mapsto & \overline{x} \cdot \overline{z} \end{array}$$
genau dann injektiv, wenn $\overline{x} \neq \overline{0}$.

6. Folgern Sie, dass die vorige Aussage auch gilt für *surjektiv* statt *injektiv.*

7. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, falls n eine Primzahl ist.

(8 Punkte)

Bonus-Aufgabe 5.4: Sei k ein Körper. Die Menge der Polynome (in X) mit Koeffizienten aus k bildet einen Ring

$$k[X] = \{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \mid \; a_i \in k, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Sei $p \in k[X]$ ein Polynom und bezeichne mit U die Menge aller Vielfachen[1] von p.

1. Beweisen Sie: Die Menge der Restklassen $\{\overline{x} = x + U \mid x \in k[X]\}$ wird durch

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{x \cdot y}$$

   (ähnlich Aufgabe 5.3) zu einem kommutativen Ring.

2. Finden Sie ein geeignetes Polynom $p \in \mathbb{F}_2[X]$ so dass die Menge der Restklassen wie in 1. zu dem Körper mit 4 Elementen von Aufgabe 4.4 wird.

Zusatz: Können Sie auf ähnliche Weise einen Körper mit 8 *oder* 9 *Elementen konstruieren?*

(4 Punkte)

[1] Also $U := \{q \cdot p \mid q \in k[X]\}$