Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 5

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die Multiplikation von $\mathbb{Z}_p$ auf der Menge

$$V := 1 + \mathfrak{m} = \{1 + x \in \mathbb{Z}_p \text{ mit } x \in \mathfrak{m}\}$$

eine abelsche Gruppenstruktur induziert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung aus Aufgabe 4 c) von Blatt 4. Zeigen Sie, dass das Bild von $\mathbb{Z}_p$ unter dieser Abbildung gerade aus den Elementen $(b_n + p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ von $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ besteht, für die gilt

$$b_m \equiv b_n \mod p^n \text{ für } m \geq n.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung ein Homöomorphismus auf das Bild ist. Zeigen Sie, dass das Bild abgeschlossen ist und folgern Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ kompakt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

a) Seien $C_1, \ldots, C_n$ zusammenhängende Teilmengen von G. Dann ist die Menge $C_1 \cdot C_2 \cdots C_n \subseteq G$ zusammenhängend.

b) Sei C zusammenhängende Teilmenge von G. Dann ist die Teilmenge C^{-1} zusammenhängend. Wenn C zusätzlich das neutrale Element e_G enthält, so ist auch die von C erzeugte Untergruppe von G zusammenhängend.

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe, 4 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie, dass die Gruppe V aus Aufgabe 1 ein $\mathbb{Z}_p$-Modul unter Exponentiation ist. D.h.

$$\exp : \mathbb{Z}_p \times V \to V, (a, 1 + x) \mapsto (1 + x)^a$$

erfüllt die Eigenschaften der Skalarmultiplikation (Man beachte: die abelsche Struktur auf V is die Multiplikation!). Dabei kann man $(1 + x)^a$ definieren als

$$(1 + x)^a := \sum_{n\geq 0} \binom{a}{n} x^n$$

mit

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

(Sie müssen nachweisen, dass die obige Reihe konvergiert.) (Alternativ können sie $(1 + x)^a$ definieren, indem Sie eine Folge von Ganzzahlen wählen, die in der p-adischen Topologie gegen a konvergiert und dann zeigen, dass sich dies stetig fortsetzen lässt.)

Abgabe am 03.12.2019, Postfach Braun.