Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 8

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Beachte: im Allgemeinen sind Vektorräume hier nicht endlichdimensional! Wir bezeichnen (wie in der Funktionalanalysis üblich) lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen als **Operatoren**.

Definition 1 *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte ($\mathbb{C}$-)Vektorräume. Ein* ***beschränkter Operator*** *T ist ein Operator*

$$T : E \to F,$$

der beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet. Wir notieren die Menge der beschänkten Operatoren von E nach F mit $\mathfrak{B}(E, F)$. Ein vollständiger normierter Vektorraum wird ***Banachraum*** *genannt.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume. Für $v \in E$, $r > 0$ bezeichnen wir mit $B_r^E(v)$ den Ball um v mit Radius r bezüglich der Norm $\|\cdot\|_E$. Sei $T : E \to F$ ein Operator. Zeigen Sie, dass alle folgenden Punkte äquivalent sind.

a) T ist Lipschitz-stetig.

b) T ist stetig.

c) T ist beschränkt.

d) $T(B_r^E(0))$ ist beschränkt für ein $r > 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und T ein beschränkter Operator. Wir definieren die **Operatornorm** durch

$$\|T\| := \sup\{\|Tu\|_F \mid u \in B_1^E(0)\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{B}(E, F), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist. Zeigen Sie außerdem, dass für einen weiteren normierten Vektorraum D und $S \in \mathfrak{B}(D, E)$ gilt, dass $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume. Zeigen Sie: Falls F ein Banachraum ist, so ist auch $(\mathfrak{B}(E, F), \|\cdot\|)$ einer. Zeigen Sie, dass der *duale Raum*

$$E^* = \mathfrak{B}(E, \mathbb{C})$$

immer ein Banachraum ist. Zeigen Sie außerdem, dass falls E endlichdimensional ist, jeder Operator $T : E \to F$ beschränkt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Finden Sie einen unbeschränkten Operator von einem unendlichdimensionalen in einen endlichdimensionalen normierten Raum. Betrachten Sie dazu zB. den Raum der Polynome über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ selbst. Finden Sie geeignete Normen. Sind die entsprechenden normierten Räume vollständig, also Banachräume?

b) Auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent (d.h. für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ existieren $c, C \in \mathbb{R}$, sodass $c\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$ gilt). Finden Sie einen unendlichdimensionalen Vektorraum und zwei nicht-äquivalente Normen darauf.

Abgabe am 14.01.2020, Postfach Braun.