Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 11

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und E ein $\mathbb{C}[G]$-Modul. Sei $f : E \to E$ eine lineare Abbildung. Konstruieren Sie aus f eine nichttriviale **lineare** Abbildung $F : E \to E$, die **invariant** ist unter der Wirkung von G auf E (d.h. $F(gx) = F(x)$ für alle x aus E und g aus G) und für die gilt, dass $F(v) = f(v)$ für $v \in E$ mit $gv = v$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie Linearität und Invarianz. Ist Ihre Abbildung auch $\mathbb{C}[G]$-invariant?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Voraussetzungen wie in Aufgabe 1. Sei nun E zusätzlich ein Hilbertraum sodass die Wirkung jedes $g \in G$ auf E einen unitären Operator definiert (d.h. E ist ein Hilbert G-Modul) und $f \in \mathfrak{B}(E)$ ein beschränkter Operator. Überprüfen Sie, ob dann das in Aufgabe 1 konstruierte F ebenfalls beschränkt ist und sogar $\|F\| \leq \|f\|$ gilt. Überprüfen Sie ebenfalls, ob falls f selbstadjungiert bzw. kompakt ist, auch F selbstadjungiert bzw. kompakt ist. Falls etwas davon nicht der Fall ist, finden Sie ein neues F, das diese Vorgaben (und die aus Aufgabe 1) erfüllt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir nennen einen Hilbert G-Modul *irreduzibel*, wenn er keinen echten nichttrivialen G-invarianten Hilbert G-Untermodul enthält. Sei nun G eine endliche Gruppe und E ein nichttrivialer nicht notwendig endlichdimensionaler Hilbert G-Modul. Zeigen Sie, dass E dann einen endlichdimensionalen irreduziblen Hilbert G-Untermodul $\emptyset \neq F \subset E$ besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Konstruieren Sie wenn möglich für die folgenden Gruppen G eine nichttriviale stetige Funktion $G \to \mathbb{R}$ mit **nicht**kompaktem Träger:

a) $G = \mathbb{R}$

b) $G = S^1$

c) $G = SL_2(\mathbb{R})$

d) $G = \mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p.

Abgabe am 04.02.2020, Postfach Braun.