Erweiterung der Analysis
Wintersemester 2020/2021

Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

0. Übungsblatt

Das 0.Übungsblatt wird nicht gewertet und dient der Wiederholung von Analysis (I &) II. Es wird in der Woche vom 9.11.-13.11. in den Übungsgruppen besprochen.

Übung 0.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $(-1,1)\backslash\{0\}$ und es gelte $\lim_{x\to 0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$, dann ist f auch differenzierbar im Punkt 0.

(ii) Es sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) > 0$, dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $f\big|_{(-\epsilon,\epsilon)}\colon (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$ monoton steigend ist.

(iii) Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Lipschitz-stetige Funktion, dann konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_1 \in X$ beliebig und $x_{n+1} = f(x_n)$.

(iv) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ rotationsfrei, dann gilt for jede geschlossene Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$:

$$\int_\gamma F \cdot dx = 0.$$

Übung 0.2 Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ und es sei $f_{n,m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x^m}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Finden Sie alle natürlichen Zahlen n, m, so dass $f_{n,m}$ überall

(i) stetig

(ii) Lipschitz-stetig

(iii) differenzierbar

(iv) stetig differenzierbar

ist.

Übung 0.3 Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall existieren. Ist f überall differenzierbar?

Übung 0.4 Wir betrachten den Raum der reellwertigen $n \times n$ Matrizen und bezeichen diesen mit $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

(i) Begründen Sie warum die Abbildung

$$\det\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto \det(A) \in \mathbb{R}$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie deren Ableitung in jedem Punkt.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die *adjunkte Matrix* aus der linearen Algebra.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sl}(n;\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit ist.