Erweiterung der Analysis
Wintersemester 2020/2021

Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

1. Übungsblatt

Abgabetermin 13.11.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 1.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Vereinigung zweier Quader ist wieder ein Quader.

(ii) Jede Drehung eines Quaders ist wieder ein Quader.

(iii) Für je zwei Quader $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^d$, so dass $A(Q_1) + b = Q_2$.

(iv) Für je zwei Quader $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\lambda(Q_1) \neq 0 \neq \lambda(Q_2)$ gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^d$, so dass $A(Q_1) + b = Q_2$.

Übung 1.2 Sei $d \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die invertierbaren $d \times d$-Matrizen mit $\mathrm{Gl}_d(\mathbb{R})$, die d-dimensionalen Quader mit Qu_d und mit

$$\mathrm{G} := \{A \in \mathrm{Gl}_d(\mathbb{R}) \mid A(Q) \in \mathrm{Qu}_d \ \forall Q \in \mathrm{Qu}_d\}$$

die Menge aller linearen Abbildungen, die Quader auf Quader abbilden. Zeigen Sie:

(i) G ist eine Gruppe.

Hinweis: Überlegen sie sich zunächst, dass alle $g \in \mathrm{G}$ jeden Standardbasisvektor auf ein vielfaches eines Standardbasisvektoren abbildet.

(ii) Für alle $g \in \mathrm{G}$ und alle Quader $Q \in \mathrm{Qu}_d$ gilt:

$$\lambda(g(Q)) = |\det(g)| \cdot \lambda(Q)$$

Übung 1.3 Wir erinnern uns an das Riemannintegral aus Analysis I. Für eine endliche Menge $M \subseteq [0,1]$ sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in M \\ 0, & \text{für } x \in [0,1] \backslash M. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f riemannintegrierbar ist und berechnen Sie das Riemannintegral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Was kann passieren, wenn die Menge M nicht mehr endlich, sondern abzählbar ist?

Übung 1.4 Zeigen Sie zunächst, dass man die Vereinigung zweier Quader als Vereingung von endlich vielen *paarweise nicht-überlappenden* Quadern schreiben kann.

Hinweis: Ein Bild könnte helfen.

Seien nun Q_1, Q_2 Quader und seien $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_m$ paarweise nicht-überlappende Quader, sodass

$$Q_1 \cup Q_2 = \bigcup_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j,$$

dann definieren wir

$$\lambda(Q_1 \cup Q_2) := \sum_{j=1}^{m} \lambda(\tilde{Q}_j).$$

Zeigen Sie, dass $\lambda(Q_1 \cup Q_2)$ unabhängig von der Wahl von den $\tilde{Q}_j$'s ist, d.h. seien $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_\ell$ paarweise nicht-überlappend mit $Q_1 \cup Q_2 = \bigcup_{n=1}^{\ell} \hat{Q}_n$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda(\tilde{Q}_j) = \sum_{n=1}^{\ell} \lambda(\hat{Q}_n).$$

Hinweis: Eine Menge von Quadern $\{Q_i\}_{i\in I}$ heißt paarweise nicht-überlappend, wenn $\lambda(Q_i \cap Q_j) = 0$ für alle $i, j \in I$ gilt.