Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

10. Übungsblatt

Abgabetermin 29.1.2021

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 10.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei $\underline{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, dann gilt

$$\underline{\nabla}(\mathrm{rot}(\underline{f})) = 0.$$

(ii) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt, dann gilt $\partial A \neq \emptyset$.

(iii) Der Satz von Stokes in Dimension zwei folgt aus dem Satz von Stokes in Dimension drei.

(iv) Es sei $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, so dass für jede geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve $\underline{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$\oint_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot \mathrm{d}\underline{x} = 0$$

gilt, dann ist $\mathrm{rot}(\underline{f}) = 0$.

Übung 10.2 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(0)}$ sei ganz in U enthalten. Sei zudem $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ *harmonisch*, d.h. $\Delta(f) = 0$. Zeigen Sie, dass die Formel

$$f(0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(0)} f(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}$$

gilt.

Hinweis: Definieren Sie für $t \in [0, 1]$ die Funktion $f_t(\underline{x}) = f(t\underline{x})$ und zeigen Sie, dass

$$I(t) := \int_{\partial B_r(0)} f_t(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}$$

konstant für alle $t \in [0, 1]$ ist, indem Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t)$ berechnen.

Übung 10.3 Es bezeichne $K_{\frac{1}{2}}$ die obere Halbkugelfläche parametrisiert wie in Beispiel 2.25. Es sei außerdem die Funktion

$$\phi\colon \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \arctan(x^2 - z^3)\mathrm{e}^{-\sin(y)} \in \mathbb{R}$$

gegeben. Berechnen Sie

$$\int_{K_{\frac{1}{2}}} \big(\underline{x} \times \underline{\nabla}\phi(\underline{x})\big) \cdot \mathrm{d}\underline{x}.$$

Hinweis: Ist die genaue Gestalt von ϕ wirklich wichtig?

Übung 10.4 Es sei $\partial B_1(0) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\underline{g} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial B_1(0)} \langle \underline{\nabla} \times \underline{g}(\underline{x}), \underline{x}\rangle \, \mathrm{d}\underline{x} = 0.$$

Eine Möglichkeit dies zu zeigen, ist die Kugeloberfläche in zwei Halbkugeloberflächen zu zerlegen und den Satz von Stokes für diese Flächenstücke verwenden. (Vorzeichen!). Vielleicht fällt Ihnen ein eleganterer Weg ein. Sie dürfen aber nicht benutzen, dass $B_1(0) \subseteq U$.

Hinweis: Der Satz von Stokes wurde im Skript nur für Flächenstücke besprochen. Diese Aufgabe ist dazu da zu zeigen, dass er noch allgemeiner gilt. Warum steht in der Gleichung auf der einen Seite Null und nicht das Integral über den Rand der Kugeloberfläche?